11 класс
2011/12 уч. год
Сферы двадцати четырех и двенадцати точек

Сегодня мы рассмотрим задачи, связанные с тремя сферами ортоцентрического тетраэдра: описанной сферой, сферой 24 точек и сферой 12 точек.

1. Для начала вспомним определение, свойства и признаки ортоцентрического тетраэдра, доказанные нами на уроках.

Определение. ***Тетраэдр называется ортоцентрическим, если каждая его вершина проектируется в ортоцентр противолежащей грани***.

Свойства и признаки.

Тетраэдр является ортоцентрическим т. и т. т., когда:
1) противолежащие ребра попарно перпендикулярны (достаточно двух пар!);
2) углы между противолежащими ребрами равны между собой;
3) равны его бимедианы;
4) описанный параллелепипед является ромбоидом;
5) равны суммы квадратов длин противолежащих ребер;
6) прямые, содержащие его высоты, пересекаются в одной точке (***ортоцентре тетраэдра***);
7) общие перпендикуляры к скрещивающимся ребрам пересекаются в одной точке (***ортоцентре тетраэдра***).

2. А) Почему вокруг любого тетраэдра можно описать сферу и где лежит ее центр O?
Б) Вспомните два равносильных условия, определяющие центроид системы точек/

[Определение. ***Центроидом {A_i}, где i = 1, 2, ... n, называется точка M*** | $\sum_{i=1}^{n}\overline{MA_i}=\overline{0}$.

Теорема. ***M является центроидом {A_i}, т. и т. т., когда*** $\forall$***O*** $\overline{OM}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\overline{OA_i}$].

В) Что является центроидом M любого тетраэдра?

[Точка пересечения медиан и бимедиан, которая делит любую медиану в отношении 3 : 1, считая от вершины, а любую бимедиану делит пополам]

Г) Каково взаимное расположение точек O, M и ортоцентра H в ортоцентрическом тетраэдре и как это доказывалось?

[M – середина [OH] – прямая Эйлера ортоцентрического тетраэдра; использовалась формула $\overline{OH}=2\overline{OM}=\frac{1}{2}\left(\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}+\overline{OD}\right)$]

Д) Как вычислить длину бимедианы тетраэдра, если даны длины его ребер? [$|EF|=\frac{1}{2}\sqrt{|AB|^2+|DC|^2+|AC|^2+|BD|^2-|AD|^2-|BC|^2}$, где E и F – середины ребер AD и BC]

Е) Как эта формула выглядит для ортоцентрического тетраэдра?

[$d=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$, где a и b – длины любых двух скрещивающихся ребер]

3. Для решения задач вам потребуется использовать гомотетию в пространстве. Ее определение и обозначение ничем не отличается от планиметрического.

Определение. ***Гомотетией с центром O и коэффициентом k ≠ 0 называется преобразование, при котором образом любой точки X является такая точка X', что*** $\overline{OX'}=k\cdot\overline{OX}$.

Обозначение: $H_O^k(X)=X'$.

Все свойства гомотетии сохраняются и для пространства.

Пример. Найдем образы тетраэдра и описанной около него сферы при гомотетии с центром M и $k = -\frac{1}{3}$.

Получим тетраэдр, вершинами которого будут центроиды граней, и сферу с центром

O_1 | $\overline{MO_1} = -\frac{1}{3}\overline{MO}$ (то есть точка M делит отрезок OO_1 в отношении 3 : 1, считая от точки O, *изобразить*) и радиусом R_1 = $\frac{R}{3}$, где R – радиус описанной сферы.

Такую сферу принято называть ***сферой двенадцати точек***, хотя в произвольном тетраэдре еще восемь точек не обладают какими-либо особенностями. Для того, чтобы лучше понять ее роль, вспомним аналогичную задачу из планиметрии.

[При гомотетии с центром M и k = $-\frac{1}{2}$ образом произвольного треугольника является его срединный треугольник, а образом его описанной окружности – окружность девяти точек (*изобразить и вспомнить:* а) соотношение $\overline{OH} = 3\overline{OM} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}$; б) O_1 – середина [MH], R_1 = $\frac{R}{2}$; в) доказательство того, что окружность, описанная около срединного треугольника, проходит еще через шесть точек)].

Задачи для самостоятельного решения

1. Точки H и O – ортоцентр и центр описанной сферы ортоцентрического тетраэдра $PABC$ соответственно.

А) Докажите равенство: $\overline{HO} = \frac{1}{2}\left(\overline{HA} + \overline{HB} + \overline{HC} + \overline{HP}\right)$.

Б) Докажите, что середины любых двух скрещивающихся ребер этого тетраэдра вместе с точками O и H являются вершинами параллелограмма.

В) Докажите, что выполняется равенство: $|OH|^2 = 4R^2 - 3d^2$, где R – радиус описанной сферы, d – длина бимедианы.

Г) Докажите, что $|HA|^2 + |HB|^2 + |HC|^2 + |HD|^2 = 4R^2$.

2. А) Докажите, что если середины всех ребер тетраэдра лежат на одной сфере, то этот тетраэдр – ортоцентрический.

Б) Докажите, что в ортоцентрическом тетраэдре окружности девяти точек всех граней лежат на одной сфере.

В) Объясните, почему эту сферу назвали ***сферой двадцати четырех точек***.

3. Докажите, что в ортоцентрическом тетраэдре центроиды граней, ортоцентры граней, а также точки, делящие отрезки, соединяющие ортоцентр тетраэдра с его вершинами, в отношении 2 : 1 (считая от вершины) лежат на ***сфере двенадцати точек.***

4. Пусть M' и H' – центроид и ортоцентр какой-либо грани тетраэдра, K и N – точки пересечения лучей HM' и $H'M$ соответственно с описанной около тетраэдра сферой.

Докажите, что: а) $\frac{|HM'|}{|M'K|} = \frac{1}{2}$; б) $\frac{|H'M|}{|MN|} = \frac{1}{3}$.