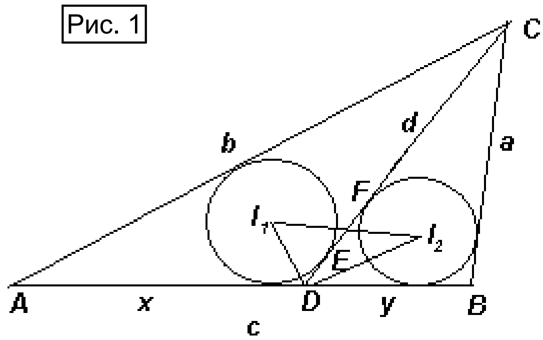
11 класс
2011/12 уч. год
Три вписанные окружности в треугольнике.

1. Продолжим рассматривать геометрическую конфигурацию, которая получается, если чевианой разбить треугольник на два треугольника и вписать в эти треугольники окружности (см. рис. 1). На прошлом занятии мы выяснили ряд свойств этой конфигурации, в частности, научились находить расстояния между точками касания окружностей с отрезком *CD*, а также решили ряд задач.

Рис. 1

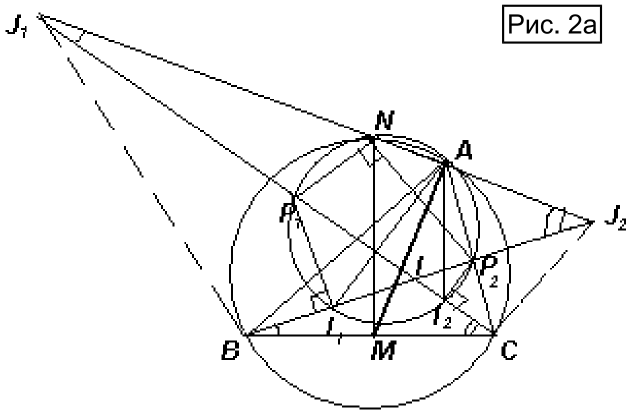


Сегодня вам будет предложена цепочка задач, которую надо решать именно в указанном порядке!

Но сначала мы рассмотрим задачу, предлагавшуюся на заключительном этапе Всероссийской олимпиады (*2011 год, задача 11.8, автор – М.А. Кунгожин*), которая вскрывает еще некоторые свойства конфигурации, но не имеет непосредственного отношения к этой «цепочке».

В треугольнике *ABC* проведена медиана *AM*. Точки I_1 и I_2 – центры окружностей, вписанных в треугольники *ABM* и *ACM*, *N* – середина дуги *BC* (содержащей вершину *A*). Докажите, что точки *A*, *N*, I_1 и I_2 лежат на одной окружности (см. рис. 2а).

Рис. 2а



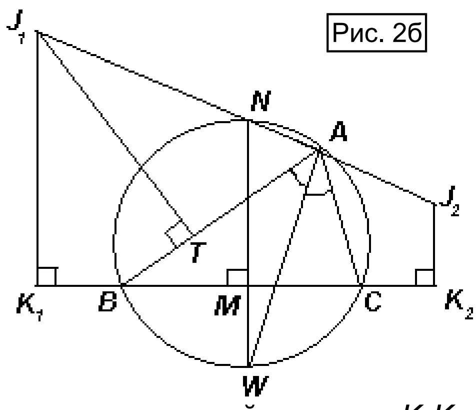
Доказательство будет состоять из нескольких частей, которые мы будем формулировать и доказывать по отдельности.

1) Пусть J_1 и J_2 – центры вневписанных окружностей треугольника ABC, касающихся сторон *AB* и *AC* соответственно. Тогда точка *N* – середина отрезка J_1J_2.

Действительно, пусть *NW* – диаметр окружности, тогда *AW* – биссектриса угла *BAC* и $\angle NAW = 90°$ (см. рис. 9б). Следовательно, биссектрисы внешних углов треугольника при вершине *A* лежат на прямой *AN*, значит, на этой прямой лежат и центры J_1 и J_2 указанных вневписанных окружностей.

Опустим перпендикуляры J_1K_1 и J_2K_2 на прямую *BC*, а также проведем $J_1T \perp AB$. Так как проведенные отрезки являются радиусами вневписанных окружностей, то $BK_1 = BT = p - a = CK_2$ (точки касания вписанной и вневписанной окружностей со стороной треугольника симметричны относительно середины этой стороны).

Рис. 2б



Таким образом, середина *M* отрезка *BC* является также и серединой отрезка K_1K_2. Так как $MN \parallel J_1K_1 \parallel J_2K_2$, то *N* – середина отрезка J_1J_2.

2) Точки *M* и *N* соответствуют друг другу в подобных треугольниках *IBC* и IJ_1J_2 (см. рис. 2а).

Действительно, $\angle J_1BJ_2 = \angle J_1CJ_2 = 90°$ (*углы между внутренними и внешними биссектрисами*). Следовательно, точки *B* и *C* лежат на окружности с диаметром J_1J_2, значит, $\angle BCJ_1 = \angle BJ_2J_1$. Тогда указанные треугольники подобны (*по двум углам*), а точки M и N – середины соответствующих сторон этих треугольников.

3) Рассмотрим окружность γ, проходящую через точки A, I_1 и I_2 (см. рис. 2а). Пусть γ, вторично пересекает BI и CI в точках P_1 и P_2 соответственно. Докажем, что P_1P_2 – диаметр этой окружности.

Тогда $\angle I_1P_1I_2 = \angle I_1P_2I_2 = \angle I_1AI_2 = \frac{1}{2}\angle BAC$. С другой стороны, $\angle BIP_1 = \angle IBC + \angle ICB = 90° - \frac{1}{2}\angle BAC = 90° - \angle I_1P_1I_2$. Следовательно, $\angle P_1I_1P_2 = \angle P_1I_2P_2 = 90°$, то есть P_1P_2 – диаметр окружности γ.

4) Так как $P_1I_1 \perp BJ_2$ и $J_1B \perp BJ_2$, то $P_1I_1 \parallel J_1B$, тогда $\frac{II_1}{IP_1} = \frac{IB}{IJ_1}$, то есть точки I_1 и P_1 соответствуют друг другу в подобных треугольниках IBC и IJ_1J_2. Аналогично, точки I_2 и P_2 – также соответствующие. Таким образом, $\angle P_1NP_2 = \angle I_1MI_2 = 90°$, то есть точка N лежит на окружности γ, что и требовалось доказать.

2. Для решения одной из задач полезно вспомнить один простой факт. Пусть $ABCD$ – прямоугольная трапеция, P – середина ее большей стороны CD, точки M и K лежат на стороне AB и AM = BK (*изобразить*). Докажите, что $|PM| = |PK|$.

[Точка P лежит на серединном перпендикуляре к $[AB]$, значит, она лежит и на серединном перпендикуляре к $[MK]$]

Задачи для самостоятельного решения.

На стороне AB треугольника ABC взята точка D. Пусть I, I_1 и I_2 – центры окружностей, вписанных в треугольники ABC, ACD и BCD соответственно, r, r_1 и r_2 – их радиусы, а L, M и K – точки касания этих окружностей со стороной AB. Докажите, что:

1. А) $|ML| = |DK|$. Б) Окружности с центрами I_1 и I_2 касаются тогда и только тогда, когда точки D и L совпадают.

2. Точки I_1, L, D и I_2 лежат на одной окружности.

3. Фиксированы две окружности ω_1 и ω_2, одна их внешняя касательная n и одна их внутренняя касательная m. На прямой m выбирается точка X, а на прямой n строятся точки Y и Z так, что XY и XZ касаются ω_1 и ω_2 соответственно, а треугольник XYZ содержит окружности ω_1 и ω_2. Докажите, что центры окружностей, вписанных в треугольники XYZ, лежат на одной прямой.

4. Пусть CD – высота треугольника ABC. Докажите, что:

А) $|I_1L| = |I_2L|$.

Б) Вершина P квадрата I_1LI_2P лежит на прямой CD.

5. Пусть CD – высота треугольника ABC и $\angle ACB = 90°$. Докажите, что:

А) точка P – центр окружности, описанной около треугольника I_1CI_2.

Б) $(I_1L)\perp(AC)$ и $(I_2L)\perp(BC)$.

В) $|I_1L| = |IL| = |I_2L|$.

Г) точки A, I_1, I_2 и B лежат на одной окружности.

6. Пусть CD – высота треугольника ABC. Докажите, что $\angle ACB = 90°$ тогда и только тогда, когда $r^2 = r_1^2 + r_2^2$.