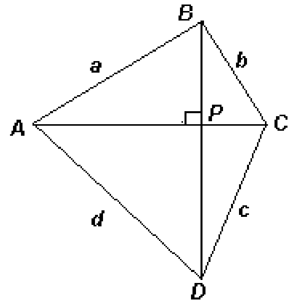
8 класс
2008/09 уч. год
Вписанный четырехугольник с перпендикулярными диагоналями.

Прежде, чем мы займемся вписанным четырехугольником, рассмотрим четырехугольник $ABCD$ и докажем следующую теорему: ***диагонали четырехугольника перпендикулярны тогда и только тогда, когда равны суммы квадратов его противолежащих сторон***.



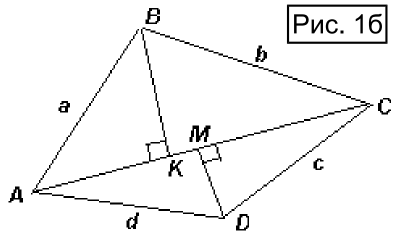
<u>Доказательство</u>. Пусть P – точка пересечения диагоналей четырехугольника. Введем обозначения длин сторон (см. рис. 1 а, б).

Рис. 1а

1) <u>Свойство</u>. Применяя теорему Пифагора в каждом из четырех прямоугольных треугольников (рис. 1а), получим, что $|AP|^2 + |BP|^2 = a^2$; $|CP|^2 + |DP|^2 = c^2$; $|BP|^2 + |CP|^2 = b^2$; $|AP|^2 + |DP|^2 = d^2$. Следовательно, $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$.

2) <u>Признак</u>. Пусть диагонали четырехугольника не перпендикулярны (см. рис. 1б). Проведем перпендикуляры BK и DM к диагонали AC. Тогда $a^2 – b^2 = |AK|^2 – |CK|^2 = (|AK| + |CK|)(|AK| – |CK|) = |AC|(|AK| – |CK|)$ и $d^2 – c^2 = |AM|^2 – |CM|^2 = (|AM| + |CM|)(|AM| – |CM|) = |AC|(|AM| – |CM|)$. Так как $a^2 + c^2 = b^2 + d^2 \Leftrightarrow a^2 – b^2 = d^2 – c^2$, то $|AK| – |CK| = |AM| – |CM| \Leftrightarrow |AK| + |CM| = |AM| + |CK|$. Это равенство выполняется только в случае, если точки K и M совпадают, то есть диагонали AC и BD этого четырехугольника также перпендикулярны.

Рис. 1б

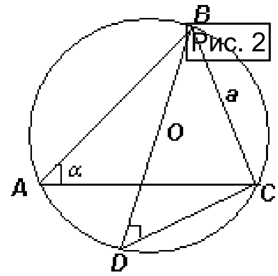


Отметим, что мы рассматривали выпуклый четырехугольник, но для невыпуклого – доказательство аналогично.

Основной объект сегодняшнего занятия – выпуклый четырехугольник $ABCD$, вписанный в окружность с центром O и радиусом R. Его диагонали AC и BD – перпендикулярны и пересекаются в точке P (*изобразить на доске*).

Отметим очевидное, но очень важное свойство этого четырехугольника: ***сумма углов, которые любая его сторона образует с диагоналями, равна 90°***. Кроме того, для решения некоторых задач вам потребуется еще одно вспомогательное утверждение, которое полностью будет доказано в 9 классе: ***отношение стороны треугольника к синусу противолежащего угла равно диаметру описанной около этого треугольника окружности***.

Рис. 2



Пока что нам достаточно доказать его только для остроугольного треугольника.

<u>Доказательство</u>. Пусть остроугольный треугольник ABC вписан в окружность с центром O и радиусом R (см. рис. 2). Докажем, что $\frac{a}{\sin\alpha} = 2R$, где $\angle BAC = \alpha$, $|BC| = a$. Проведем диаметр BD, тогда $\angle BDC = \angle BAC = \alpha$, $\angle BCD = 90°$. Следовательно, $\sin\alpha = \frac{BC}{BD} = \frac{a}{2R}$, то есть $\frac{a}{\sin\alpha} = 2R$, что и требовалось.

Задачи для самостоятельного решения

1. Даны четыре палочки и известно, что из них можно составить четырехугольник с перпендикулярными диагоналями (палочки являются его сторонами). Докажите, что из них можно составить четырехугольник с двумя прямыми углами.

Во всех последующих задачах рассматривается выпуклый четырехугольник $ABCD$, вписанный в окружность с центром O и радиусом R. Его диагонали AC и BD – перпендикулярны и пересекаются в точке P.

2. А) Докажите, что $|AP|^2 + |BP|^2 + |CP|^2 + |DP|^2 = 4R^2$;
Б) Найдите сумму квадратов сторон этого четырехугольника;
В)* Докажите, что сумма квадратов диагоналей этого четырехугольника равна $8R^2 - 4p^2$, где p – расстояние от центра окружности до точки пересечения диагоналей.

3. Через вершины вписанного четырехугольника проведены касательные к его описанной окружности. Докажите, что точки их попарного пересечения являются вершинами вписанного четырехугольника т. и т. т., когда диагонали исходного четырехугольника взаимно перпендикулярны.

4. Из вершин A и B опущены перпендикуляры на прямую CD, пересекающие прямые BD и AC в точках K и L соответственно. Докажите, что: а) $\angle ALB = \angle KDC$ или $\angle ALB + \angle KDC = 180°$; б) $AKLB$ – ромб.

5. Докажите, что расстояние от точки O до стороны AB равно половине длины CD.

6. Докажите, что прямая, проведенная из точки P перпендикулярно стороне BC делит сторону AD пополам.

7. А) Докажите, что середины сторон четырехугольника лежат на одной окружности.
Б) Докажите, что проекции точки P на стороны четырехугольника (*основания перпендикуляров, опущенных из точки P на стороны*) лежат на той же окружности.
В)* Найдите радиус этой окружности, если даны R и $|OP| = p$.
Г)* Докажите, что точка P является центром окружности, вписанной в четырехугольник, вершинами которого являются проекции точки P на стороны $ABCD$.