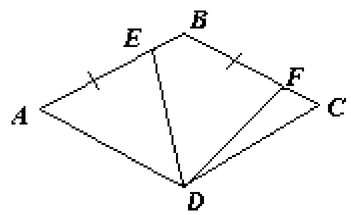
9 класс
2009/10 уч. год
Геометрические задачи на применение движений.

Сегодня мы рассмотрим геометрические задачи, которые эффективно решаются с помощью движений на плоскости. О каких движениях идет речь? [Центральная и осевая симметрии, параллельный перенос и поворот] Некоторые из этих задач можно решить и без помощи движений, но я вас постараюсь убедить, что применение движений сильно упрощает как само решение, так и его поиски.

Рассмотрим для начала уже знакомую многим из вас задачу.

Пример 1. На сторонах *AB* и *BC* ромба *ABCD* с тупым углом *ABC*, равным 120°, выбраны точки *E* и *F* соответственно так, что отрезки *AE* и *BF* равны. Найдите угол *FDE.*

Решение. $R_D^{90^\circ}(B) = A$ (*почему*?), $R_D^{90^\circ}(F) = E$ (*почему*?), то есть $R_D^{90^\circ}([BF]) = [AE]$. Значит, $\angle FDE$ = 60°.



Попутно мы доказали, что треугольник *DEF* – равносторонний (*почему*?). Возникает тогда идея рассмотреть обратную задачу.

Пример 2. На сторонах *AB* и *BC* ромба *ABCD* выбраны точки *E* и *F* соответственно так, что отрезки *AE* и *BF* равны. Оказалось, что треугольник *DEF* – равносторонний. Найдите углы ромба.

Поворот не помогает и надо искать что-то другое ...

Решение 1. На стороне *AB* отложим [*AF'*] | |*AF'*| = |*CF*|, тогда $\Delta DAF'$ = ΔDCF (I пр.), следовательно, |*DF'*| = |*DF*| = |*DE*|, то есть $\Delta DEF'$ – р/б. Проведем [*DK*]$\perp$[*AB*], *K*$\in$[*AB*], тогда *K* – середина [*EF'*]. Кроме того, |*AF'*| = |*CF*| = |*BE*|, значит, *K* – середина [*AB*]. Следовательно, ΔABD – р/с, то есть **углы ромба – 60° и 120°**.

А теперь убедимся в том, что это все-таки движения ...

Решение 2. $S_{(BD)}(C) = A$ (*почему*?), $S_{(BD)}(F) = F' \in [AB]$ (*почему*?). Тогда |*DF'*| = |*DF*| = |*DE*|. Проведем [*DK*]$\perp$[*AB*], *K*$\in$[*AB*]. $S_{(DK)}([BF']) = [AE]$ (*почему*?). Таким образом, $S_{(DK)} \circ S_{(BD)}([BF]) = [AE]$. Так как $S_{(DK)} \circ S_{(BD)} = R_D^{2\alpha}$, где α = $\angle BDK$, то $\angle BDA$ = 2α. Следовательно, ΔABD – р/с, то есть **углы ромба – 60° и 120°**.

В каком случае полученный ответ будет неверен? [Точки E и F – середины сторон ромба].

Отметим, что в геометрических рассуждениях равенство треугольников можно всегда заменить движением (или их композицией) и наоборот!

В заключение – о задаче, которая, казалось бы, не имеет никакого отношения к движениям. Она была этой осенью на Турнире Ломоносова.

Пример 3. Даны две картофелины произвольной формы и размера. Докажите, что по поверхности каждой из них можно проложить по проволочке так, что получатся два изогнутых колечка (не обязательно плоских), одинаковых по форме и размеру.

Решение. Совместим две картофелины так, чтобы их поверхности пересекались, и натянем проволочку по линии пересечения.

Причем тут движения? При том, что совмещение картофелин означает, что мы рассматриваем движение при котором образом одной из картофелин является ей равная! (*Аналогично тому, как мы строим прямую, параллельную данной и отсекающую в двух фигурах – окружностях или р/б треугольниках равные хорды – изобразить*).

Задачи для самостоятельного решения

Задачи №№5 – 8 принимаются, если сданы хотя бы три задачи из №№1 – 4.

№1. Внутри прямоугольника *ABCD* выбрана произвольная точка *M*. Докажите, что существует выпуклый четырехугольник с перпендикулярными диагоналями, стороны которого равны соответственно отрезкам *AM*, *BM*, *CM* и *DM*.

№2. В треугольник вписана окружность и проведены касательные, параллельные сторонам треугольника. Докажите, что противолежащие стороны образовавшегося шестиугольника попарно равны.

№3. На стороне *CD* квадрата *ABCD* выбрана произвольная точка *E* и построен квадрат *DEFG* (точки *F* и *G* лежат вне квадрата *ABCD*). Докажите, что отрезки *AE* и *CG* равны и перпендикулярны.

№4. Существует ли выпуклый четырехугольник, не имеющий ни центра симметрии, ни оси симметрии, который можно разрезать на два равных четырехугольника?

№5. Постройте четырехугольник *ABCD* по двум сторонам *AB* и *AD* и двум углам *B* и *D*, если известно, что в него можно вписать окружность.

№6. Постройте выпуклый четырехугольник по четырем сторонам и отрезку, соединяющему середины двух противолежащих сторон.

№7. В выпуклом четырехугольнике *ABCD*: $\angle ABD = \angle CDB = 60°$, $\angle BCA = \angle CAD = 30°$. Найдите $|BD|$, если $|AB| = 2$ см.

№8. В выпуклом четырехугольнике *ABCD* равны стороны *AB*, *BC* и *CD*, *M* – середина стороны *AD*. Известно, что угол *BMC* – прямой. Найдите угол между диагоналями *AC* и *BD*.