Изогональное сопряжение.

1. Вспомним теорему ***Чевы***: три чевианы *AA*', *BB*' и *CC*' треугольника *ABC* пересекаются в одной точке т. и т. т., когда $\frac{|AB'|}{|B'C|}\cdot\frac{|CA'|}{|A'B|}\cdot\frac{|BC'|}{|C'A|}=1$.

2. Докажем следствие из нее, которое обычно называют ***теоремой Чевы в форме синусов***: три чевианы *AA*', *BB*' и *CC*' треугольника *ABC* пересекаются в одной точке т. и т. т., когда $\frac{\sin\angle ABB'}{\sin\angle B'BC}\cdot\frac{\sin\angle CAA'}{\sin\angle A'AB}\cdot\frac{\sin\angle BCC'}{\sin\angle C'CA}=1$.

3. Докажем, что ***если чевианы AA', BB' и CC' треугольника ABC пересекаются в одной точке, то чевианы AA₁, BB₁ и CC₁, симметричные им относительно биссектрис углов A, B и C соответственно, также пересекаются в одной точке***.

4. Пусть *P* – точка пересечения первой тройки чевиан, а *Q* – точка пересечения второй тройки, тогда ***точки P и Q называют изогонально сопряженными относительно треугольника ABC***.

5. Вершина *A* треугольника *ABC* соединена отрезком с центром *O* описанной окружности. Из вершины *A* проведена высота *AH*. Докажите, что $\angle BAO=\angle CAH$.
Отсюда следует, что точки H и O – изогонально сопряжены.

6. Пусть *AA*', *BB*' и *CC*' – медианы треугольника *ABC*, а AA_1, BB_1 и CC_1 – симедианы. Из доказанного утверждения следует, что ***симедианы треугольника также пересекаются в одной точке***. ***Точка Q пересечения симедиан называется точкой Лемуана***.

7. Треугольник *ABC* вписан в окружность. Касательные к окружности, проведенные в точках *B* и *C*, пересекаются в точке *P*. Докажите, что прямая *AP* содержит симедиану треугольника *ABC*.

8. Пусть точки C_1 и A_1 лежат на сторонах AB и BC соответственно треугольника ABC так, что $\angle BA_1C_1=\angle BAC$. Докажите, что: а) высота BH треугольника ABC проходит через центр описанной окружности треугольника A_1BC_1; б) медиана BM треугольника ABC является симедианой A_1BC_1.

Задачи для самостоятельного решения.

1. Пусть AA_1, BB_1 и CC_1 – высоты треугольника ABC. Докажите, что перпендикуляры, опущенные из *B* на A_1C_1, из *A* на B_1C_1 и из *C* на A_1B_1 пересекаются в одной точке. Что это за точка?

2. В треугольнике *ABC* проведены медиана *CM* и высота *CH*. Докажите, что $\angle ACM=\angle BCH$ т. и т. т., когда $\angle ACB=90^{\circ}$.

3. Две окружности с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках *A* и *B*. Через произвольную точку *X* первой окружности проведена прямая *XA*, которая пересекает вторую окружность в точке *Y* и прямая *XB*, которая пересекает вторую окружность в точке *Z*. Докажите, что прямая *YZ* перпендикулярна диаметру первой окружности, проведенному через точку *X*.

4. Докажите, что: а) высоты; б) биссектрисы; в) медианы всех таких треугольников *XYZ*, проведенные из точки *X* пересекаются в одной точке.

5. В остроугольном треугольнике *ABC* на высоте *BK* как на диаметре построена окружность *S* , пересекающая стороны *AB* и *BC* в точках *E* и *F* соответственно. К окружности *S* в точках *E* и *F* проведены касательные. Докажите, что их точка пересечения лежит на прямой, содержащей медиану треугольника *ABC* , проведённую из вершины *B*.

6. Высоты AA_1 и CC_1 остроугольного треугольника *ABC* пересекаются в точке *H* . Точка B_0 – середина стороны *AC* . Докажите, что точка пересечения прямых, симметричных BB_0 и HB_0 относительно биссектрис углов *ABC* и *AHC* соответственно, лежит на прямой A_1C_1.

7. К двум окружностям w_1 и w_2, пересекающимся в точках *A* и *B*, проведена их общая касательная *CD* (*C* и *D* — точки касания соответственно, точка *B* ближе к прямой *CD*, чем *A*). Прямая, проходящая через *A*, вторично пересекает w_1 и w_2 в точках *K* и *L* соответственно (*A* лежит между *K* и *L*). Прямые *KC* и *LD* пересекаются в точке *P*. Докажите, что *PB* — симедиана треугольника *KPL*.