Прямая Нагеля.

На протяжении всей серии придерживаемся следующих обозначений для объектов, связанных с треугольником ABC.

A', B', C' — середины сторон BC, CA, AB; M – точка пересечения медиан, I – инцентр треугольника, I_1 – центр вневписанной окружности, касающейся стороны BC, A_0, B_0, C_0 – точки касания вписанной окружности со сторонами BC, CA, AB, A_1, B_1, C_1 – точки касания вневписанных окружностей со сторонами BC, CA, AB, *N* – точка Нагеля, B_2, C_2 – точки касания вневписанных окружностей с лучами СА и ВА соответственно.

1. Обобщение теоремы Чевы.

<u>Обобщенная Теорема Чевы</u>. Три чевианы AA_1, BB_1, CC_1 треугольника ABC пересекаются в одной точке т. и т. т., когда $\frac{\overline{CA_1}}{\overline{A_1B}} \times \frac{\overline{BC_1}}{\overline{C_1A}} \times \frac{\overline{AB_1}}{\overline{B_1C}} = 1$.

2. Точки Нагеля (4).

Докажите, что: А) прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке N.

Б) прямые BB_2, CC_2 и AA_0 пересекаются в одной точке.

3. Задача о биссектрисе параллелограмма.

В параллелограмме ABCD на сторонах AB и BC выбраны точки C_1 *и* A_1 *соответственно так, что* $AC_1 = A_1C$*. Пусть Q – точка пересечения отрезков* AA_1 *и* CC_1*. Докажите, что DQ – биссектриса угла D.*

4. Задача про точки касания.

Докажите, что точки A, A_1 *и точка, диаметрально противоположная* A_0 *лежат на одной прямой.*

5. Прямая Нагеля (формулировка).

I, M и N лежат на одной прямой, причем $NM = 2MI$ (прямая Нагеля).

Задачи для самостоятельного решения.

Серия 1 (через задачу о биссектрисе).

1. Докажите, что $CB_1 = BC_1$ и аналогично для других отрезков.

2. Пусть $A''B''C''$ – антидополнительный треугольник треугольника ABC.

Докажите, что: А) $A''N, B''N, C''N$ – его биссектрисы, то есть N – инцентр $A''B''C''$.

Б) $H_M^{-0,5} : A''B''C'' \to ABC$.

В) Докажите, что I, M и N лежат на одной прямой, причем $NM = 2MI$ (прямая Нагеля).

Серия 2 (через задачу о точках касания).

1. Докажите, что $A'A_1 = A'A_0$ и аналогично для других отрезков.

2. Докажите, что $A'I \parallel AA_1$ и аналогично для других отрезков.

3. А) $H_M^{-0,5} : ABC \to A'B'C'$; Б) $(AA_1) \to (A'I)$ и аналогично для других прямых.

В) Докажите, что I, M и N лежат на одной прямой, причем $NM = 2MI$ (прямая Нагеля).

Дополнение.

Еще три прямые Нагеля.

Пусть N_1 – точка пересечения прямых BB_2, CC_2 и AA_0.

Докажите, что I_1, M и N_1 лежат на одной прямой, причем $N_1M = 2MI_1$.

А) Используя факт, аналогичный **задаче о биссектрисе параллелограмма**.

Б) Используя факт, аналогичный **задаче о точках касания**.