Прямая Симсона.

1. а) Докажите, что основания перпендикуляров, опущенных из точки *P* описанной окружности треугольника на его стороны или их продолжения, лежат на одной прямой (прямая Симсона).

б) Основания перпендикуляров, опущенных из некоторой точки *P* на стороны треугольника или их продолжения, лежат на одной прямой. Докажите, что точка *P* лежит на описанной окружности треугольника.

2. а) Из точки *P* описанной окружности треугольника ABC проведены прямые PA_1, PB_1 и PC_1 под данным (ориентированным) углом к прямым *BC*, *CA* и *AB* соответственно (точки A_1, B_1 и C_1 лежат на прямых *BC*, *CA* и *AB*). Докажите, что точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой.

б) Докажите, что при замене в определении прямой Симсона угла $90°$ на угол α она повернется на угол $90°-\alpha$.

3. Точка *P* движется по описанной окружности треугольника *ABC*. Докажите, что при этом прямая Симсона точки *P* относительно треугольника *ABC* поворачивается на угол, равный половине угловой величины дуги, пройденной точкой P.

4. Четыре попарно пересекающиеся прямые образуют четыре треугольника.

А) Докажите, что описанные окружности этих треугольников имеют общую точку. (точку Микеля)

Б) Используя точку Микеля, докажите утверждение 1б и утверждение, обратное 2а.

В) Точки *A*, *B* и *C* лежат на одной прямой, а точка *P* – вне этой прямой. Докажите, что центры описанных окружностей треугольников *ABP*, *BCP*, *ACP* и точка *P* лежат на одной окружности.

Г) Докажите, что центры описанных окружностей этих треугольников лежат на одной окружности, проходящей через точку Микеля.

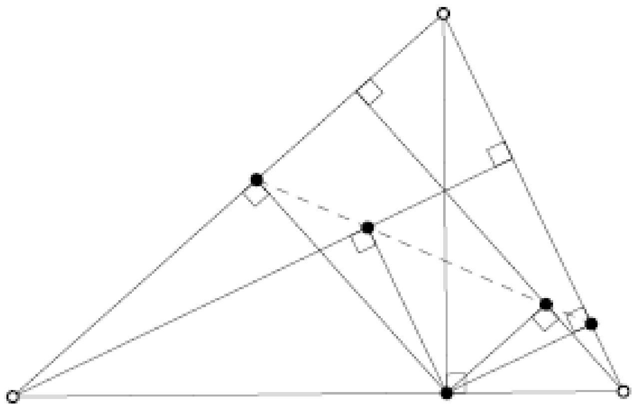
5. А) Две равные окружности пересекаются в точках *A* и *B*. Докажите, что прямая, соединяющая произвольную точку одной окружности с ее образом при повороте около точки А, отображающем эту окружность на другую, проходит через точку В.

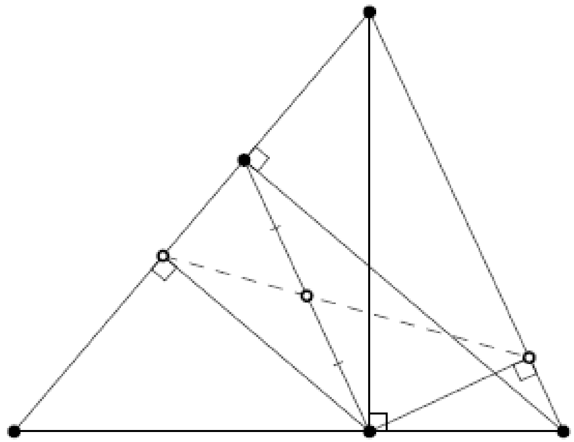
Б) Высоты треугольника *ABC* пересекаются в точке *H*; *P* — точка его описанной окружности. Докажите, что образы точки *P* относительно сторон треугольника лежат на одной прямой, проходящей через его ортоцентр. (прямая Штейнера)

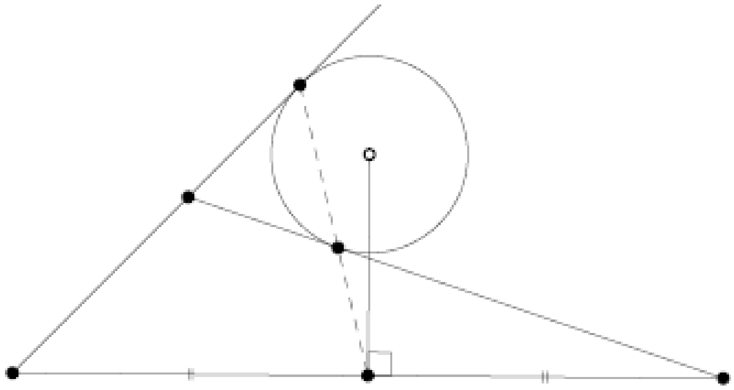
В) Высоты треугольника *ABC* пересекаются в точке *H*; *P* — точка его описанной окружности. Докажите, что прямая Симсона точки *P* относительно треугольника *ABC* делит отрезок *PH* пополам.

Задачи для самостоятельного решения.

1. Картинки.







2. Известно, что прямая Симсона точки *P* относительно треугольника *ABC* параллельна прямой *AO*, где *O* – центр описанной окружности. Докажите, что $AP \parallel BC$.

3. Даны четыре прямые. Докажите, что проекции точки Микеля на эти прямые лежат на одной прямой.

4. А) Пусть I – центр вписанной окружности треугольника *ABC*. Окружность, проходящая через точки *B* и I пересекает *AB* и *BC* в точках *E* и *F* соответственно. Докажите, что середина отрезка *EF* лежит на прямой A_0C_0, где A_0 и C_0 – точки касания вписанной окружности треугольника ABC со сторонами *BC* и *AB* соответственно.

Б) Докажите, что I – точка Микеля для прямых *AB*, *BC*, *EF* и A_0C_0 и придумайте другое решение пункта А).

5. Дан треугольник *ABC*. Рассматриваются прямые *l*, обладающие следующим свойством: три прямые, симметричные *l* относительно сторон треугольника, пересекаются в одной точке. Докажите, что все такие прямые проходят через одну точку.

6. В треугольнике *ABC* проведена биссектриса *AD* и из точки *D* опущены перпендикуляры *DB′* и *DC′* на прямые *AC* и *AB*; точка *M* лежит на прямой *B′C′*, причем $DM \perp BC$. Докажите, что точка *M* лежит на медиане AA_1.

7. На окружности фиксированы точки *P* и *C*; точки *A* и *B* перемещаются по окружности так, что угол *ACB* остается постоянным. Докажите, что прямые Симсона точки *P* относительно треугольников ABC касаются фиксированной окружности.

8. Докажите, что прямые Симсона двух диаметрально противоположных точек описанной окружности треугольника *ABC* перпендикулярны, а их точка пересечения лежит на окружности девяти точек.