Ортоцентр, середина стороны, точка пересечения касательных и … еще одна точка!

0. 1) Докажите, что ортоцентр треугольника – центр вписанной окружности его ортотреугольника.
2) Докажите, что точка, симметричная ортоцентру относительно середины стороны *AB* треугольника *ABC* лежит на описанной окружности и диаметрально противоположна точке *C*.
3) Докажите, что точки, симметричные ортоцентру относительно сторон треугольника ABC лежат на его описанной окружности и образуют треугольник, гомотетичный ортотреугольнику.
4) Докажите, что расстояние от центра описанной окружности треугольника *ABC* до середины стороны *AB* равно половине расстояния от вершины *C* до ортоцентра треугольника.
5) Докажите, что касательные к описанной окружности треугольника параллельны сторонам его ортотреугольника.
6) Докажите, что треугольники с соответственно параллельными сторонами – гомотетичны.
7) *Радикальный центр.* Даны три окружности, из которых каждые две пересекаются. Докажите, что прямые, содержащие их общие хорды пересекаются в одной точке.
8) *Основное свойство симедианы.* Треугольник *ABC* вписан в окружность. Касательные к окружности, проведенные в точках *A* и *B*, пересекаются в точке *Z*. Докажите, что прямая *CZ* содержит симедиану треугольника *ABC*.

Пусть AA_1 *и* BB_1 *– высоты остроугольного неравнобедренного треугольника ABC. Окружности* ω *и* ω_1*, описанные около треугольников ABC (O – центр) и* A_1B_1C *(*O_1 *– центр) соответственно, вторично пересекаются в точке P. Докажите, что:*

1. А) ***Точки M (середина AB), H (ортоцентр) и P лежат на одной прямой.***
Б) Окружности, описанные около треугольников AMA_1 и BMB_1 проходят через точку *P*.

2. А) Пусть окружности, описанные около треугольников AMA_1 и BMB_1 пересекают прямые *BC* и *AC* в точках *K* и *L* соответственно. Докажите, что *K, M, O* и *L* лежат на одной прямой.
Б) Пусть окружности описанные около треугольника AMA_1 и BMB_1 пересекают прямые *AC* и *BC* в точках *K* и *L* соответственно. Докажите, что *K, M,* O_1 и *L* лежат на одной прямой.

3. Пусть касательные в точках *A* и *B* к окружности ω, пересекают прямую A_1B_1 в точках *X* и *Y* соответственно и пересекаются в точке *Z*. Докажите, что:
А) Окружности описанные около треугольников AMA_1 и BMB_1 проходят через точки *X* и *Y* соответственно.
Б) ***M – центр вписанной окружности треугольника XYZ.***
В) точки *Z, P* и H_C (симметричная *H* относительно стороны *AB*), лежат на одной прямой.
Г) ***описанные окружности треугольников ABC и XYZ касаются в точке P.***

4. Пусть A_2 – точка, симметричная A_1 относительно высоты CC_1. Докажите, что:
А) A_2 лежит на прямой B_1C_1 и на окружности ω_1
Б) A_2, *A* и *P* лежат на одной прямой.

5. А) ***прямые MH,*** A_1B_1 ***и*** ZC_1 ***пересекаются в одной точке.***
Б) ***прямые AP, BC и*** ZC_1 ***пересекаются в одной точке.***

6. Пусть A_1B_1 и AB пересекаются в точке S, *R* – середина *CM*. Докажите, что:
А) ***C, P и S лежат на одной прямой.***
Б) ***прямые SH и CM перпендикулярны.***
В) ***OR⊥SC.***

Серия 1 (вокруг окружностей) : 1А, 1Б, 2А, 2Б, 3А.
Серия 2 (пересечение на стороне ортотреугольника): 3Б, 5А.
Серия 3(пересечение на стороне треугольника): 1А, 4А, 4Б, 5Б.
Серия 4 (касание): 3Б, 3В, 3Г.
Серия 5 (перпендикулярность): 1А, 6 А, 6 Б, 6В.