Л.А.Емельянов
(Калуга)

ТОЧКА ШИФФЛЕРА[1]

Памяти И.Ф.Шарыгина

Какие характерные точки треугольника известны школьнику? Их можно, что называется, пересчитать по пальцам: центр тяжести, центры вписанной и описанной окружностей, ортоцентр, центр окружности девяти точек. Более искушенные вспомнят точки Жергонна, Нагеля, Лемуана, Брокара. Вот, пожалуй, и все. А между тем характерных точек треугольника (в современной геометрической литературе они называются *центрами треугольника*) насчитывается уже более полутора тысяч! Главным энтузиастом этой «коллекции» является канадский геометр Кларк Кимберлинг. Ознакомиться с этим массивом нетрудно, достаточно зайти через Интернет на страницу http://faculty.evansville.edr/ck6/encyclopedia/ETC.html, где располагается «Энциклопедия центров треугольника», но разобраться в этом море информации очень сложно, тем более что многие точки определены не геометрически, а скорее алгебраически.

В дальнейшем речь пойдет об одном из центров треугольника, в упомянутой энциклопедии ему отводится почетное 21-е место. Точка эта имеет чисто геометрическое определение и очень богата на красивые свойства, не зря ее называют одним из самых заманчивых открытий геометрии XX в. К сожалению, мне неизвестно авторское доказательство существования этой точки, но подозреваю, что оно счетное, а не геометрическое.

Наверное, я уже утомил читателя вступлением, перейдем к определениям.

Прямой Эйлера треугольника называется прямая, проходящая через центр описанной около него окружности O и центр тяжести M.

Как известно, на этой прямой также располагаются ортоцентр треугольника H и центр окружности девяти точек O_0, причем в любом треугольнике центр тяжести делит отрезок HO в отношении $2:1$, а центр окружности девяти точек находится в середине этого отрезка.

Существование точки Шиффлера устанавливается следующей теоремой.

Основная теорема. Пусть I – центр вписанной окружности треугольника ABC. Прямые Эйлера треугольников AIB, BIC и CIA пересекаются в одной точке, находящейся на прямой Эйлера треугольника ABC.

Точка пересечения этих четырех прямых Эйлера и называется точкой Шиффлера треугольника ABC. На рис. 1 она обозначена Sh, центры тяжести треугольника AIB, BIC и CIA отмечены точками, но не обозначены буквами, пунктирные линии – это прямые Эйлера этих треугольников.

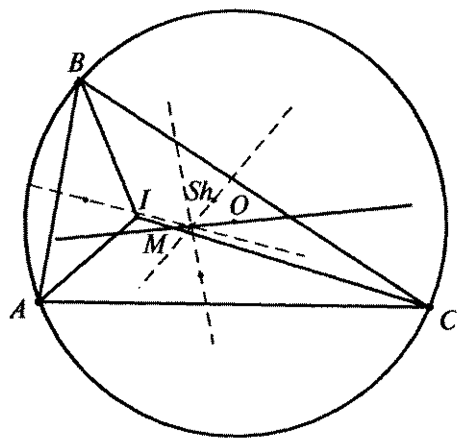

Рис. 1

О точке Шиффлера я рассказал на одном из семинаров И.Ф.Шарыгину. Факта этого он не знал и очень им заинтересовался. При следующей встрече Игорь Федорович сообщил, что решил эту задачу с помощью площадей. Как он сказал, решение непростое. Но вполне геометрическое. К сожалению, я так и не узнал этого решения, но то дополнительное свойство точки Шиффлера, которое, по словам Игоря Федоровича, следовало из его решения, позволило найти совсем несложное доказательство более сильной теоремы, чем та, что была сформулирована выше.

Идея доказательства состоит в том, чтобы найти на прямой Эйлера исходного треугольника такую точку, через которую проходят три указанные прямые. Однако в отличие от H и O_0 отношение, в котором точка Шиффлера делит отрезок OM, зависит от вида треугольника. Какова эта зависимость? Ответ на этот вопрос, а заодно и на вопрос о существовании точки Шиффлера, дает следующая теорема.

---

[1] *Kurt Schiffler* (1896–1986) – американский инженер, бизнесмен, геометр-любитель.

Теорема. Прямые Эйлера треугольников AIB, BIC и CIA проходят через точку, делящую отрезок OM в отношении $3R:2r$, где R и r – радиусы описанной и вписанной окружностей треугольника ABC.

Для доказательства нам понадобятся две теоремы.

Теорема Менелая. Точки A_1, B_1, C_1, лежащие на прямых BC, CA, AB соответственно, лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда

$$\frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{C_1B}}\cdot\frac{\overrightarrow{BA_1}}{\overrightarrow{A_1C}}\cdot\frac{\overrightarrow{CB_1}}{\overrightarrow{B_1A}}=-1.$$

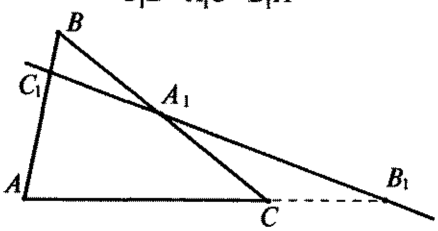

Рис. 2

На рис. 2 изображено одно из возможных положений точек A_1, B_1 и C_1 на сторонах треугольника. Именно такое расположение (две точки на сторонах и одна на продолжении третьей стороны) нам и встретится в дальнейшем. Заметим также, что если характер этого расположения известен, то можно отказаться от векторной формулировки и перейти к отношению длин отрезков, заменив «–1» в правой части на 1.

Лемма Мансиона (о середине дуги). Пусть P – середина той дуги AC описанной окружности треугольника, которая не содержит точку B. Тогда длины отрезков PA, PC и PI равны между собой.

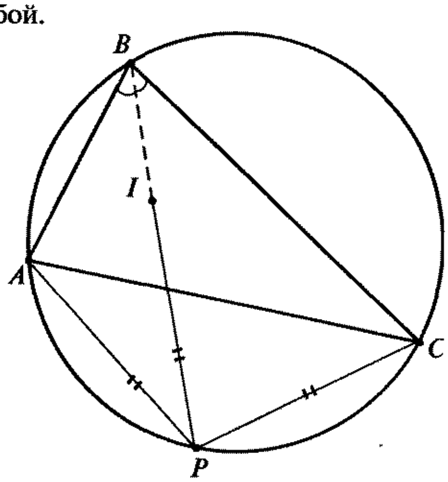

Рис. 3

Рис. 3 демонстрирует лемму Мансиона. Посмотрев на него внимательно и посчитав углы треугольника API, нетрудно убедиться, что он равнобедренный. Однако не будем останавливаться на доказательствах теоремы Менелая и леммы Мансиона – они просты и достаточно распространены в литературе.

Перейдем к доказательству основной теоремы. Из леммы следует, что середина дуги (точка P) – это центр описанной окружности треугольника AIC, а именно через нее и должна пройти одна из трех прямых Эйлера. Как же задать эту прямую? Ортоцентр треугольника AIC «поймать» непросто, проще найти центр тяжести – точку, делящую отрезок между I и серединой стороны CA в отношении $2:1$.

Теперь рассмотрим треугольник OMB_0, где B_0 – середина стороны AC (рис. 4). Пусть Sh – точка пересечения прямых MO и PM_2 (M_2 – центр тяжести треугольника AIC). Прямая Эйлера треугольника AIC пересекает стороны треугольника OMB_0 в точках Sh, P и некоторой точке K, лежащей на стороне MB_0 – части медианы BB_0 треугольника ABC. Про эту точку мы мало что знаем – роль ее вспомогательная, но нам понадобится отношение, в котором она делит отрезок B_0M, чтобы, записав теорему Менелая для треугольника OB_0M, найти отношение $CSh:ShO$. Для этого запишем еще одну теорему Менелая: теперь для треугольника BIB_0 и точек P, M_2, K, принадлежащих сторонам (или их продолжениям) этого треугольника и лежащих на одной прямой.

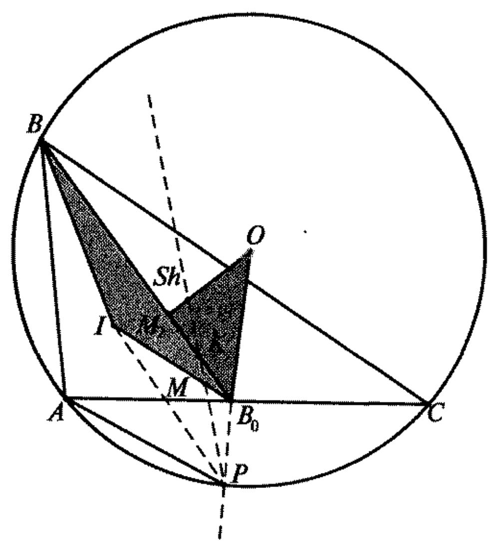

Рис. 4

После изложения идеи доказательства перейдем к ее реализации.

1. В треугольнике BIB_0

$$\frac{BK}{KB_0}\cdot\frac{B_0M_2}{M_2I}\cdot\frac{IP}{PB}=1,$$

а так как $B_0M_2 : M_2I = 1 : 2$ заключаем, что

$$\frac{BK}{KB_0}=\frac{2PB}{IP}.$$

Прежде чем перейти к треугольнику OMB_0, пересчитаем отношение $\frac{BK}{KB_0}$ в отношении $\frac{MK}{KB_0}$, воспользовавшись тем, что M делит отрезок BB_0 в отношении $2 : 1$:

$$\frac{BK}{KB_0}=\frac{2MB_0+MK}{KB_0}=\frac{2(MK+KB_0)+MK}{KB_0}=3\frac{MK}{KB_0}+2;$$

следовательно,

$$3\frac{MK}{KB_0}=\frac{BK}{KB_0}-2=\frac{2PB}{IP}-2=\frac{2(PB-IP)}{IP}=\frac{2BI}{IP}.$$

Из этого следует, что

$$\frac{MK}{KB_0}=\frac{2}{3}\cdot\frac{BI}{IP}.$$

2. Теперь настала очередь треугольника OMB_0. Теорема Менелая для точек Sh, K, P выглядит так:

$$\frac{MSh}{ShO}\cdot\frac{OP}{PB_0}\cdot\frac{B_0K}{KM}=1,$$

значит,

$$\frac{MSh}{ShO}=\frac{PB_0}{OP}\cdot\frac{MK}{KB_0}=\frac{PB_0}{OP}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{BI}{IP}=\frac{2}{3R}\cdot\frac{BI\cdot PB_0}{IP}.$$

Вспомним лемму Мансиона: $IP = AP$. В прямоугольном треугольнике AB_0P отношение катета PB_0 к гипотенузе AP равно

$$\sin\angle B_0AP=\sin\angle CBP=\sin\frac{B}{2}.$$

Но из треугольника ABC следует $BI\cdot\sin\frac{B}{2}=r$. Окончательно получаем:

$$\frac{MSh}{ShO}=\frac{2}{3R}\cdot\frac{BI\cdot PB_0}{IP}=\frac{2BI}{3R}\cdot\frac{PB_0}{AP}=\frac{2}{3R}\cdot BI\sin\frac{B}{2}=\frac{2r}{3R}.$$

Чтобы завершить доказательство, достаточно заметить, что мы рассматривали прямую Эйлера треугольника AIC, но получили отношение, не зависящее от стороны AC, а равноправное для всех сторон треугольника ABC. Значит, для прямых Эйлера треугольников BIC и AIB будет реализовано то же отношение, т.е. все четыре прямые пересекаются в одной точке – точке Шифлера треугольника ABC.

Итак, доказательство окончено. Оглядываясь на его этапы, мы видим, что оно совсем несложно и складывается из двукратного применения теоремы Менелая и леммы Мансиона. Но самое главное в нем не это, а, конечно же, точно сформулированная задача, что является следствием незаурядной геометрической интуиции Игоря Федоровича Шарыгина.

В заключение приведем без доказательства два свойства точки Шиффлера, показывающие ее тесную связь с более привычными объектами планиметрии.

1. Окружность, проходящая через основания чевиан, порождаемых точкой Шиффлера на сторонах треугольника, проходит через точку Фейербаха этого треугольника.

Для доказательства надо найти отношение, в котором прямые ASh, BSh и CSh делят стороны треугольника, а затем воспользоваться критерием принадлежности точки Фейербаха окружности, описанной около оснований чевиан. Этот критерий содержится в статье «Семейство Фейербаха» (*Л.Емельянов, Т.Емельянова*. «Математическое просвещение». № 6, 2002).

2. Пусть O, I_a, I_b, I_c – центры описанной и трех вневписанных окружностей треугольника ABC. Точки пересечения прямых OI_a, OI_b, OI_c с соответствующими сторонами треугольника являются основаниями чевиан, порождаемых на этих сторонах точкой Шиффлера треугольника ABC. Доказательство этого свойства содержится в статье «A Note on the Schiffler Point». L.Emelyanov and T.Emelyanova, Forum Geometricorum Volume 3 (2003) 113–116. (http://forumgeom.fau. edu/FG2003volume3/FG200312index.html).