РЕНЕ ДЕКАРТ (1596–1650). ДЕКАРТОВА СИСТЕМА КООРДИНАТ

Г. Б. Филипповский, г. Киев

Пока алгебра и геометрия развивались врозь, их прогресс был медленным, применение — ограниченным. Когда же эти две науки были соединены, они стали помогать друг другу и быстро шагать к совершенству.

Ж. Л. Лагранж

Если бы Декарт не написал «Геометрию», в которой прочными дружескими узами связал воедино алгебру и геометрию, то и тогда бы мы причисляли его к когорте крупнейших математиков. Судите сами: Декарт первым начал записывать известные величины как a, b, c, а неизвестные — x, y, z. Он упростил обозначение степени, и оно приобрело современный вид: a^2; x^3; y^4... Он сформулировал основную теорему алгебры: алгебраическое уравнение n-й степени имеет ровно n корней, если учитывать положительные, отрицательные и комплексные корни (впоследствии доказана К. Ф. Гауссом). Декарт нашел алгоритм образования дружественных чисел, исследовал совершенные числа (те, что равны сумме всех своих делителей). Придал знаку радикала современный вид: $\sqrt{a}$, например. Первым стал говорить о комплексных числах, называя их воображаемыми (imaginaire). Отыскал закономерность, связывающую число вершин (В), граней (Г) и ребер (Р) многогранника: $B+\Gamma-P=2$ (позже эту формулу обобщил и строго доказал Л. Эйлер, чье имя она сегодня и носит).

Человечество почитает Декарта и как крупного философа, основателя нового направления в философии — картезианства (Cartesius — латинизированное имя Декарта). Его философские взгляды оказали большое влияние на Ньютона и Лейбница. Хотя главное, быть может, это то, что на основе идей Декарта эти выдающиеся ученые разработали принципы дифференциального и интегрального исчисления.

В физике Декарт показал относительность движения и покоя. Вывел закон сохранения количества движения при ударе двух неупругих тел. В оптике он объяснил закон постоянного отношения синусов углов падения и преломления светового луча. Развил математическую теорию радуги, указал на причины ее появления.

Любопытно, что сам Декарт считал себя:
в первую очередь философом;
во вторую — космологом;
в третью — физиком;
в четвертую — биологом
и только
в пятую — математиком.

Как тут не вспомнить:

«Нам не дано предугадать,
Как наше слово отзовется!..»

Мы же сейчас попробуем выяснить, почему последующие полтора века после Декарта математика в основном развивалась путями, им предначертанными.

В июне 1637 года в голландском городе Лейдене вышло в свет сочинение господина Декарта «Рассуждение о методе». Одна из частей этого труда называлась «Геометрия». Она-то и совершила переворот в математике! В «Геометрии» Рене Декарта был предложен универсальный метод решения математических задач — метод координат. Согласно этому методу алгебраические задачи решают средствами геометрии. В то же время при решении геометрических задач используют теорию алгебраических уравнений. Декарт тем самым объединил «варварскую» алгебру стран арабского халифата и «классическую» геометрию Древней Греции.

Как же это ему удалось? С одной стороны, Декарт предложил все алгебраические операции выполнять с помощью геометрических построений. Для этого некоторый отрезок следует принять за единичный. Тогда можно перемножать и делить отрезки, извлекать из них корни...

Задача 1 (Декарт)

Дан единичный отрезок. С помощью циркуля и линейки разделите отрезок a на отрезок b.

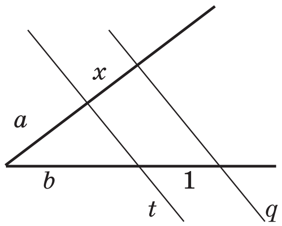

Рис. 1

Решение. Отложив отрезки a; b; 1 на сторонах произвольного угла и проведя $q \parallel t$ (*рис. 1*), получаем пропорцию, вытекающую из теоремы Фалеса: $\frac{a}{x} = \frac{b}{1}$, откуда $x = \frac{a}{b}$.

Задача 2 (Декарт). Постройте циркулем и линейкой отрезок, равный $a \cdot b \cdot c$, имея единичный отрезок.

Решение. Аналогично задаче 1 строим отрезок $y = \frac{a \cdot b}{1}$, затем точно так же — отрезок $x = \frac{y \cdot c}{1}$.

Задача 3 (Декарт). Постройте отрезок $\sqrt{a}$, если дан единичный отрезок.

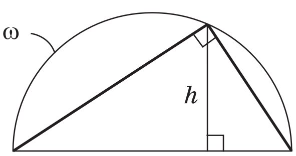

Рис. 2

Решение. На отрезке $a+1$ как на диаметре строим полуокружность ω (*рис. 2*). Тогда, очевидно,

$$h = \sqrt{a \cdot 1} = \sqrt{a}.$$

Таким образом, утверждает Декарт, алгебраические уравнения можно решать геометрическим методом.

Задача 4. Постройте корни уравнения

$$x^2 - mx + n = 0.$$

Решение. Согласно теореме Виета:

$$x_1 + x_2 = m \text{ и } x_1 \cdot x_2 = n.$$

Тогда на отрезке $AB = m$ как на диаметре строим полуокружность ω (*рис. 3*). На расстоянии $\sqrt{n}$ от диаметра AB ($\sqrt{n}$ строим, как в задаче 3) проводим $l \parallel AB$. Она пересекает ω в точке N (или N_1). Проводим $NT \perp AB$ (или $N_1T_1 \perp AB$). Получим, например, $AT = x_1$ и $BT = x_2$ — корни данного квадратного уравнения построены.

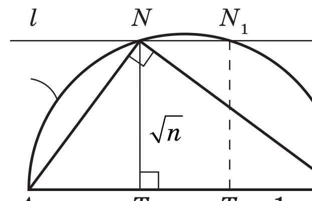

Рис. 3

С другой стороны, Декарт показал, что геометрические кривые могут быть заданы алгебраическими уравнениями и, следовательно, их можно с помощью этих уравнений проанализировать. Так, например, прямая линия задана уравнением $ax + by + c = 0$. А уравнение окружности выглядит так:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2,$$

где R — радиус окружности и точка $O(a,b)$ — ее центр. Уравнению $xy - 1 = 0$ соответствует гипербола и так далее.

Чтобы найти точки пересечения, например, окружности и параболы, нужно решить систему уравнений, которыми эти линии задаются. При этом корни, по мнению Декарта, могут быть «истинными» (положительными), «ложными» (отрицательными) и даже «воображаемыми» (комплексными).

Не считая алгебру наукой, Декарт видел в ней мощный метод, позволяющий упростить рассуждения и сэкономить усилия при нахождении неизвестных величин. Пусть алгебра «поработает» на геометрию — вот девиз Декарта. И действительно, знаменитые древние задачи об удвоении куба и трисекции угла он сводил к построению корней определенного кубического уравнения. Сложнейшую задачу на ГМТ, решенную в свое время усилиями Евклида, Аполлония и Паппа (и то лишь для 3-х или 4-х прямых), Декарт решает для 5, 6, 7... 12 прямых при помощи уравнений 3, 4, 5, 6 степеней.

Таким образом, идеи Декарта объединили две отрасли математических знаний — алгебру и геометрию. Это объединение оказалось благотворным для той и другой. Дополняя друг друга, алгебра и геометрия вместе совершили мощнейший рывок вперед в своем развитии. Метод координат Декарта, легший в основу аналитической геометрии, позволил справиться с некоторыми нерешенными доселе задачами. Дал возможность увидеть важные закономерности, незамеченные ранее. Математика в целом получила сильный животворящий импульс!..

Сам же метод координат оказался тем самым прочным методом, который соединил алгебру с геометрией. Решение задачи методом координат иногда можно рассматривать как применение алгебры в геометрии, а иногда — наоборот. Покажем это на примерах.

АЛГЕБРА ПОМОГАЕТ ГЕОМЕТРИИ

Задача 5. Дан прямоугольный треугольник с катетами 6 и 8. Найдите расстояние между центрами вписанной и описанной около него окружностей.

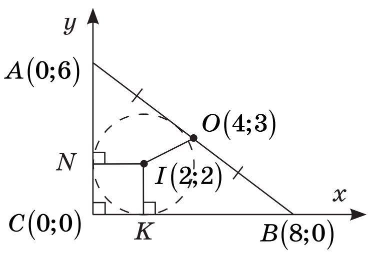

Рис. 4

Решение. Пусть в прямоугольном треугольнике $ABC\,(C=90°)$ $BC=8$; $AC=6$. Выберем прямоугольную систему координат с началом в вершине C прямого угла (*рис. 4*). Тогда $C(0;0)$; $B(8;0)$; $A(0;6)$. Поскольку центр O описанной около треугольника ABC окружности совпадает с серединой гипотенузы AB, то

$$O\left(\frac{0+8}{2};\frac{6+0}{2}\right), \text{ или } O(4;3).$$

Радиус r вписанной в треугольник ABC окружности найдем по формуле:

$$r=\frac{a+b-c}{2},$$

где

$$BC=a=8;\ AC=b=6;\ AB=c=\sqrt{6^2+8^2}=10.$$

Получим $r=2$. Пусть I — центр этой окружности. Так как

$$IN=IK=r=2,$$

то $I(2;2)$. Остается найти длину отрезка OI по формуле расстояния между двумя точками:

$$OI=\sqrt{(4-2)^2+(3-2)^2}=\sqrt{5}.$$

Задача 6. Дан прямоугольный треугольник ABC $(C=90°)$ с катетами $BC=a$ и $AC=b$. На гипотенузе AB во внешнюю сторону построен квадрат $ABNT$ с центром O (*рис. 5*). Найдите CO.

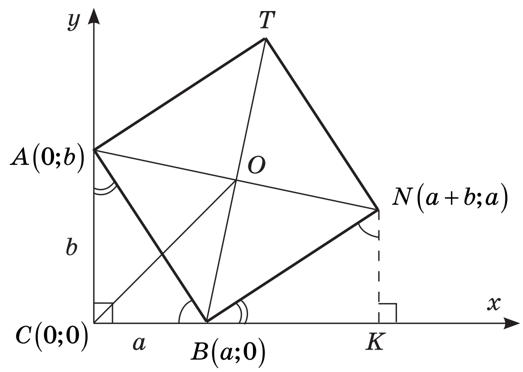

Рис. 5

Решение. Вновь выберем прямоугольную систему координат с началом в точке C. Очевидно, $C(0;0)$; $B(a;0)$; $A(0;b)$. Если мы найдем координаты точки N, то задача будет решена. Действительно, точка O — середина AN (ее координаты можно найти), затем находим CO по формуле расстояния между двумя точками. Проведем $NK\perp BC$. Нетрудно показать, что

$$\Delta NKB=\Delta BCA$$

(покажите!). Тогда $BK=b$ и $NK=a$. Значит, $N(a+b;a)$. Затем находим координаты точки

$$O\left(\frac{a+b}{2};\frac{a+b}{2}\right).$$

После чего

$$CO=\sqrt{\left(\frac{a+b}{2}-0\right)^2+\left(\frac{a+b}{2}-0\right)^2}=\frac{a+b}{\sqrt{2}}.$$

Задача 7. Около квадрата со стороной $2a$ описана окружность. Найдите сумму квадратов расстояний от произвольной точки окружности до вершин квадрата.

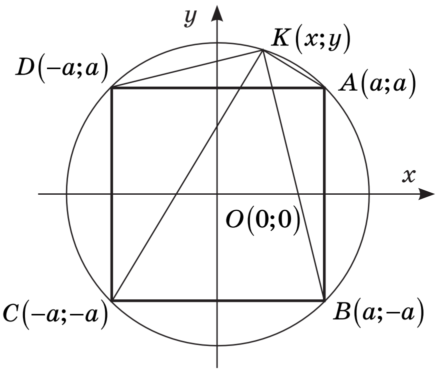

Рис. 6

Решение. На сей раз поместим начало прямоугольной системы координат в центр O квадрата $ABCD$ (*рис. 6*). Тогда $A(a;a)$; $B(a;-a)$; $C(-a;-a)$; $D(-a;a)$. Выберем на описанной около квадрата окружности произвольную точку $K(x;y)$, не забыв, что

$$x^2+y^2=R^2=(a\sqrt{2})^2=2a^2$$

(по теореме Пифагора).

По формуле расстояния между двумя точками имеем:

$$KA^2=(x-a)^2+(y-a)^2;\quad KB^2=(x-a)^2+(y+a)^2;$$

$$KC^2=(x+a)^2+(y+a)^2;\quad KD^2=(x+a)^2+(y-a)^2.$$

Сложив левые и правые части всех четырех равенств, получим:

$$KA^2+KB^2+KC^2+KD^2=$$
$$=2((x+a)^2+(y+a)^2+(x-a)^2+(y-a)^2)=$$
$$=2(2x^2+2y^2+4a^2)=16a^2$$

(с учетом того, что $x^2+y^2=2a^2$).

Задача 8. На плоскости даны две точки B и C. Найдите множество вершин A треугольников E таких, в которых медиана a равна стороне b.

Решение. Пусть $BC=a$. Выберем прямоугольную систему координат с началом в точке C, а ось абсцисс пустим вдоль прямой BC.

Тогда $C(0;0)$; $B(a;0)$ и $A(x;y)$, где A — точка искомого ГМТ (*рис. 7*). Очевидно,

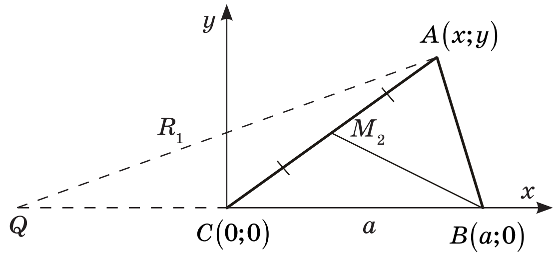

Рис. 7

$$M_2\left(\frac{x}{2};\frac{y}{2}\right),$$

где M_2 — середина AC. Согласно условию, $BM_2=AC$, или

$$\left(\frac{x}{2}-a\right)^2+\left(\frac{y}{2}\right)^2=(x-0)^2+(y-0)^2.$$

Имеем: $\frac{x^2}{4}-ax+a^2+\frac{y^2}{4}=x^2+y^2$, или

$$3x^2+3y^2+4ax=4a^2,$$

или

$$x^2+\frac{4a}{3}x+y^2=\frac{4}{3}a^2,\text{ или }\left(x+\frac{2}{3}a\right)^2+y^2=\frac{16}{9}a^2.$$

Следовательно, искомое ГМТ есть окружность с центром в точке $Q\left(-\frac{2}{3}a;0\right)$ радиуса $R_1=\frac{4}{3}a$. Понятно, что необходимо исключить две точки пересечения этой окружности с прямой BC.

ГЕОМЕТРИЯ ПОМОГАЕТ АЛГЕБРЕ

Задача 9. Найдите наименьшее значение суммы

$$Q=\sqrt{x^2+y^2-4x+2y+5}+\sqrt{x^2+y^2+6x-10y+34}.$$

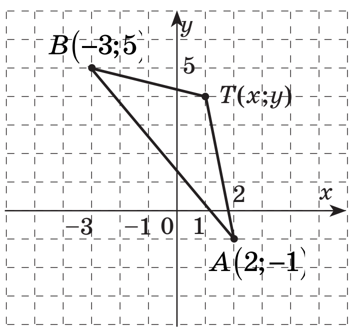

Рис. 8

Решение. Преобразуем сумму Q в более удобный вид:

$$Q=\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2}+\sqrt{(x+3)^2+(y-5)^2}.$$

Рассмотрим на координатной плоскости точки $A(2;-1)$; $B(-3;5)$ и $T(x;y)$ — *рис. 8*.

Очевидно,

$$AT=\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2} \text{ и } BT=\sqrt{(x+3)^2+(y-5)^2}.$$

Тогда искомая сумма $Q=AT+BT$. Но $AT+BT\ge AB$ (неравенство треугольника), где

$$AB=\sqrt{(2+3)^2+(-1-5)^2}=\sqrt{61}.$$

Значит, $Q\ge\sqrt{61}$. Знак равенства достигается, когда T совпадает с любой точкой отрезка AB. Итак, $Q_{\min}=\sqrt{61}$.

Задача 10. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}\sqrt{(x-1)^2+y^2}+\sqrt{(x+1)^2+y^2}=2,\\ x^2+y^2-4x=0.\end{cases}$$

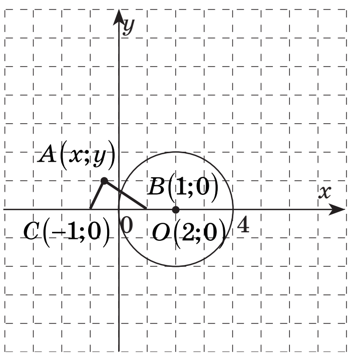

Рис. 9

Решение. Пусть в прямоугольной системе координат $B(1;0)$; $C(-1;0)$ и $A(x;y)$ — *рис. 9*. Тогда

$$AB=\sqrt{(x-1)^2+y^2};$$

$$AC=\sqrt{(x+1)^2+y^2} \text{ и } BC=\sqrt{(1+1)^2+0^2}=2.$$

Первое уравнение системы принимает вид $AB+AC=BC$, что означает: A — любая точка отрезка BC. Второе уравнение преобразуем к виду: $(x-2)^2+y^2=4$. Это окружность с центром $O(2;0)$ радиуса 2. Тогда решением системы являются координаты точки пересечения этой окружности с отрезком BC.

Ответ. $(0;0)$.

Задача 11. Найдите наименьшее значение выражения

$$\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{(x-4)^2+(y-3)^3},$$

если $x-y-2=0$.

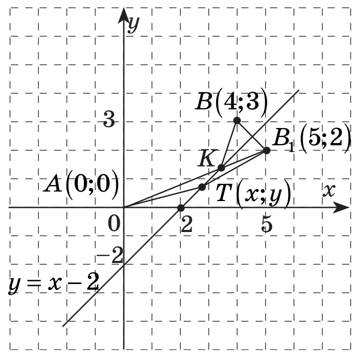

Рис. 10

Решение. На координатной плоскости рассмотрим точку $A(0;0)$ и $B(4;3)$, а также точку $T(x;y)$ на прямой $y=x-2$ такую, чтобы сумма $TA+TB$ была минимальной (*рис. 10*). Действительно,

$$TA=\sqrt{x^2+y^2} \text{ и } TB=\sqrt{(x-4)^2+(y-3)^2}.$$

Перед нами — задача Герона: *Дана прямая и две точки по одну сторону от нее. Найти на прямой такую точку, чтобы сумма расстояний от нее до двух данных точек была наименьшей.*

Строим точку B_1, симметричную B относительно прямой $y=x-2$ и находим ее координаты: $B_1(5;2)$. Находим точку K пересечения прямой AB_1 с прямой

$$y=x-2:\ K\left(\frac{10}{3};\frac{4}{3}\right).$$

Точка K является искомой, так как

$$AK+KB<AT+TB$$

или (что одно и то же),

$$AK+KB_1<AT+TB_1$$

(покажите!). Тогда наименьшее значение искомого выражения равно длине отрезка B_1A, где

$$B_1A=\sqrt{5^2+2^2}=\sqrt{29}.$$

Прежде чем предложить несколько задач для самостоятельного решения, сделаем несколько замечаний.

1. Система координат Декарта имела менее совершенный вид, чем сегодня (не было, например, отрицательной полуоси), но идеи были заложены те же самые.
2. Одновременно с Декартом «вышел» на систему координат еще один выдающийся математик Франции — Пьер Ферма. Но его труд был опубликован значительно позже «Геометрии» Декарта. К тому же, у Ферма были менее удобные символы и обозначения.
3. Свой труд Декарт завершает такими словами: «У меня нет цели написать великую книгу. Я скорее стремлюсь в немногих словах высказаться о многом… Надеюсь, потомки будут благодарны мне не только за то, что я объяснил, но и за то, что я добровольно пропустил, дабы доставить им удовольствие самим отыскать это…»

Задачи для самостоятельного решения

Задача 12. Дан отрезок a. Пользуясь отрезком длины 1, постройте отрезок

$$x=\frac{a^2-9}{a^2+a-2}.$$

Задача 13. Дан отрезок длины 1 и отрезки, равные m; n; k. Постройте отрезок x, если

$$x=\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{k}.$$

Задача 14. Постройте прямоугольный треугольник по гипотенузе и биссектрисе прямого угла. (Папп Александрийский)

Указание. Воспользовавшись подобием, составьте квадратное уравнение и построением найдите его корни.

Задача 15. В круг вписана трапеция $ABCD$ $(AB\parallel CD)$. K — произвольная точка на диаметре круга, параллельного его основаниям. Докажите, что $KA^2+KB^2=KC^2+KD^2$.

Задача 16. Могут ли координаты всех вершин равностороннего треугольника выражаться рациональными числами?

Задача 17. Найдите множество точек, сумма квадратов расстояний от которых до вершин B и C треугольника ABC равна квадрату расстояния до его третьей вершины A.

Задача 18. Найдите наименьшее значение выражения

$$\sqrt{x^2+(y-1)^2}+\sqrt{(x-1)^2+y^2}.$$

Задача 19. Докажите, что при любых x, y, z выполняется неравенство:

$$\sqrt{x^2+xy+y^2}+\sqrt{x^2+xz+z^2}\ge\sqrt{y^2+yz+z^2}.$$

Указание. Рассмотрите на координатной плоскости точки

$$A(x;0);\ B\left(-\frac{y}{2};\frac{y\sqrt{3}}{2}\right);\ C\left(-\frac{z}{2};-\frac{z\sqrt{3}}{2}\right).$$

Задача 20. Решите уравнение:

$$\sqrt{(x+1)^2+y^2}+\sqrt{(x+5)^2+(y-3)^2}+\sqrt{(x-2)^2+y^2}=8.$$

Указание. Воспользуйтесь тем фактом, что при наличии в треугольнике угла $A\ge120^\circ$ точка минимума суммы расстояний до вершин совпадает с вершиной угла A.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Баврин И. И., Фрибус Е. А.* Старинные задачи. — М. : Просвещение. 1994.
2. *Баран О. І.* Математичні мініатюри. — К. : Ленвіт, 2007.
3. *Виленкин Н. Я., Шибасов Л. П., Шибасова З. Ф.* За страницами учебника математики. — М. : Просвещение, 1996.
4. *Глейзер Г. И.* История математики в школе. — М. : Просвещение, 1982.
5. *Даан-Дальмедико А., Пейффер Ж.* Пути и лабиринты. — М. : Мир, 1986.
6. *Дорофеева А. В.* Рене Декарт и его «Геометрия». — «Квант». — № 9. — 1987.
7. *Кованцов М. І.* Математична хрестоматія. — К. : Радянська школа, 1970.
8. *Кованцов Н. И.* Математика и романтика. — К. : Вища школа, 1980.
9. *Крайзман М. Л.* Розв'язування геометричних задач методом координат. — К. : Радянська школа, 1983.
10. *Кушнир И.* Координатный и векторный методы решения задач. — К. : Астарта, 1996.
11. *Мирошин В.* Формулы геометрии помогают алгебре. — «Квант». — № 3. — 2007.
12. *Панов В. Ф.* Математика древняя и юная. — М. : изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2006.
13. *Пидоу Д.* Геометрия и искусство. — М. : Мир, 1979.
14. *Тадеєв В. О.* Рене Декарт. Геометрія і філософія. — Тернопіль : Підручники і посібники, 2002.
15. *Чучаев И. И., Крюкова В. Л.* Геометрические неравенства и уравнения. — «Математика в школе». — № 9, 10. — 2004.

■