Г. Филипповский, г. Киев

О ТОЧКЕ НА СТОРОНЕ И ДВУХ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ

Наш разговор пойдет о следующей конструкции в треугольнике ABC: точка K движется по стороне BC; из нее проведены $KN \parallel AB$ и $KT \parallel AC$ (*рис. 1*). В результате получены два треугольника BTK и CNK, подобные данному треугольнику ABC, а также параллелограмм $ANKT$.

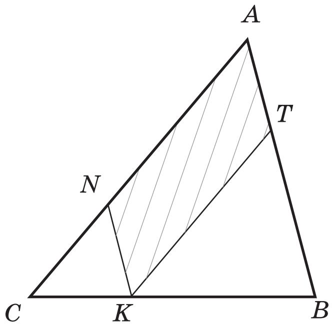


Рис. 1

Предложенные ниже задачи призваны показать, что указанная конструкция заслуживает внимания, имеет ряд интересных и полезных закономерностей.

Задача 1. Пусть h_1 и h_2 — высоты треугольников CNK и BTK, проведенные соответственно из вершин N и T (*рис. 2*). Докажите, что $h_1 + h_2 = h_a$ (h_a — высота AH_1 в треугольнике ABC).

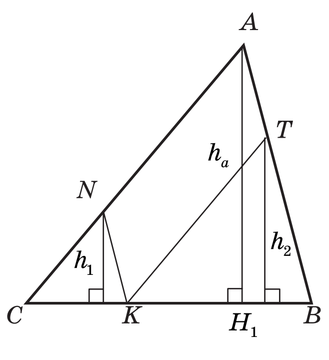


Рис. 2

Доказательство. Так как $\Delta CNK \sim \Delta CAB$, то

$$\frac{h_1}{h_a} = \frac{CK}{CB}. \qquad (1)$$

Из подобия треугольников BTK и BAC имеем такую пропорцию:

$$\frac{h_2}{h_a} = \frac{BK}{CB}. \qquad (2)$$

Сложив левые и правые части равенств (1) и (2) и учтя равенство $CK + BK = CB$, получим требуемое: $h_1 + h_2 = h_a$.

Задача 2. Известно, что $ANKT$ — ромб. Чем является точка K в треугольнике ABC?

Решение. Поскольку диагонали ромба являются биссектрисами его углов, то AK совпадает с биссектрисой угла A треугольника ABC (*рис. 3*). Значит, точка K — основание внутренней биссектрисы угла A треугольника ABC.

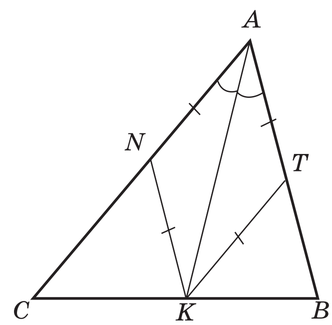


Рис. 3

Задача 3. Чем является точка K в треугольнике ABC, если $NT \parallel BC$?

Решение. Очевидно, диагональ AK делит NT пополам, то есть $NE = ET$ (*рис. 4*). Поскольку $CNTB$ — трапеция и $NE = ET$, то тогда $CK = KB$ (по лемме о трапеции: середины оснований, точка пересечения продолжений боковых сторон трапеции и точка пересечения ее диагоналей лежат на одной прямой). Следовательно, точка K совпадает с серединой стороны BC.

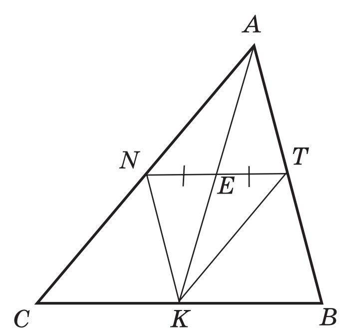
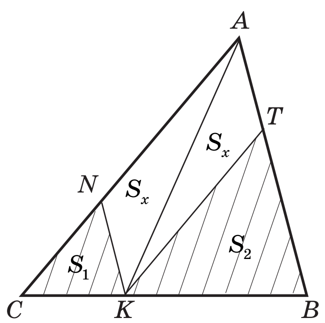


Рис. 4

Задача 4. Площади треугольников CNK и BTK соответственно равны S_1 и S_2. Найдите площадь параллелограмма $ANKT$.

Решение. Проведем в параллелограмме $ANKT$ диагональ AK и обозначим каждую из половинок образовавшихся площадей через S_x (*рис. 5*).

Очевидно, $\frac{S_x}{S_1}=\frac{AN}{NC}$ (площади треугольников ANK и CNK относятся как основания AN и NC, поскольку они имеют общую высоту, проведенную из вершины K). Треугольники BTK и KNC подобны, и их площади относятся как квадраты соответствующих линейных размеров, то есть $\frac{S_2}{S_1}=\frac{KT^2}{NC^2}$, или $\frac{\sqrt{S_2}}{\sqrt{S_1}}=\frac{KT}{NC}$. Так как $KT=AN$, то $\frac{\sqrt{S_2}}{\sqrt{S_1}}=\frac{AN}{NC}$. Следовательно, $\frac{S_x}{S_1}=\frac{\sqrt{S_2}}{\sqrt{S_1}}$, откуда $S_x=\sqrt{S_1\cdot S_2}$ и $S_{ANKT}=2S_x=2\sqrt{S_1\cdot S_2}$.



■ **Рис. 5**

Задача 5. Пусть $AC=b$, $AB=c$, $KN=x$, $KT=y$, $CK=m$ и $BK=n$ (*рис. 6*).

Докажите, что $bxn=cym$.

Доказательство. Из подобия треугольников KNC и BAC следует:

$$\frac{x}{c}=\frac{m}{BC},\ \text{или}\ cm=x\cdot BC.$$

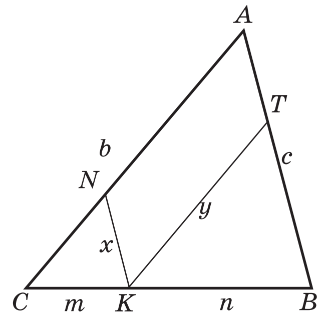
Домножим левую и правую части последнего равенства на y. Получим:

$$cmy=x\cdot y\cdot BC. \qquad (1)$$

Подобие треугольников KTB и CAB дает следующую пропорцию:

$$\frac{y}{b}=\frac{n}{BC},\ \text{или}\ bn=y\cdot BC.$$

Подставив значение $y\cdot BC$ в правую часть равенства (1), получим требуемое.



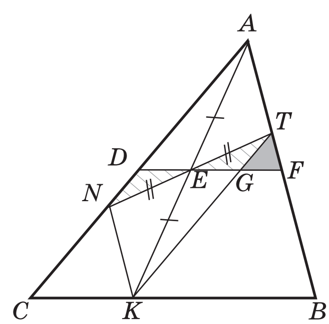
■ **Рис. 6**

Задача 6. Известно, что площадь параллелограмма $ANKT$ составляет $\frac{S}{2}$ — половину площади треугольника ABC. Докажите, что точка K совпадает с серединой стороны BC.

Доказательство. Диагональ параллелограмма делит его площадь пополам, поэтому

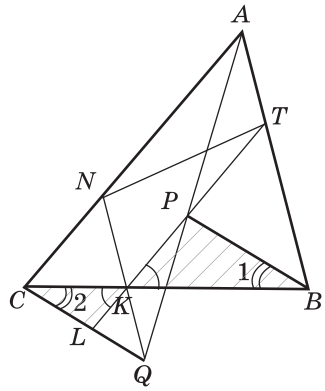
$$S_{ANT}=S_{NKT}=\frac{S}{4}.$$

Проведем DF — среднюю линию треугольника ABC, параллельную стороне BC (*рис. 7*). Очевидно, DF делит AK пополам, то есть $AE=EK$. Нетрудно увидеть, что треугольники NED и TEG равны ($G=DF\cap KT$). Тогда равны и их площади: $S_{NED}=S_{TEG}$. Получаем следующее: с одной стороны $S_{ADF}=\frac{S}{4}$ (средняя линия отсекает треугольник площади $\frac{S}{4}$), с другой стороны, $S_{ANT}=\frac{S}{4}$ (согласно условию). Однако $S_{ANT}<S_{ADF}$ ровно на площадь маленького треугольника GTF. Противоречие. Значит, NT совпадает с DF, а точка K является серединой стороны BC (см. задачу 3).



■ **Рис. 7**

Задача 7. Произвольная прямая, проведенная через вершину A треугольника ABC, пересекает KT в точке P и продолжение NK — в точке Q (*рис. 8*). Докажите, что $BP\parallel CQ$.



■ Рис. 8

Доказательство. Очевидно, $\frac{CN}{NA}=\frac{CK}{KB}$ — по теореме Фалеса. Продлим PK до пересечения с QC в точке L. Тогда, учитывая параллельность AC и LP, имеем:

$$\frac{CN}{NA}=\frac{LK}{KP}.$$

Следовательно, $\frac{CK}{KB}=\frac{LK}{KP}$ и треугольники CKL и BKP подобны — по пропорциональности двух сторон и равенству углов между ними, а значит, $\angle 1=\angle 2$ и $BP \parallel CQ$.

Задача 8. Докажите, что треугольники BNK и CTK равновелики.

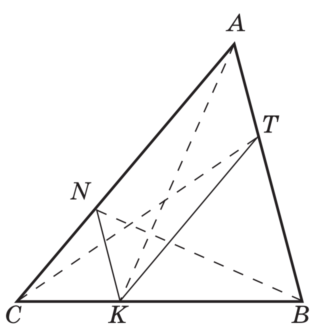
Доказательство. Диагональ AK делит параллелограмм $ANKT$ на два равных, а значит и равновеликих, треугольника. То есть $S_{ANK}=S_{ATK}$ (*рис. 9*). Поскольку $ANKB$ — трапеция ($NK \parallel AB$), то

$$S_{ANK}=S_{BNK}. \quad (1)$$

Но и $ATKC$ — трапеция ($TK \parallel AC$), откуда следует, что

$$S_{ATK}=S_{CTK}. \quad (2)$$

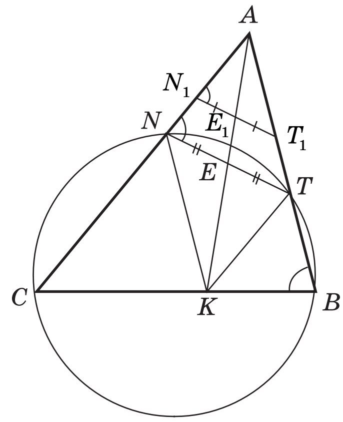
Из равенств (1) и (2) с учетом того, что $S_{ANK}=S_{ATK}$, следует: $S_{BNK}=S_{CTK}$.



■ Рис. 9

Задача 9. Где на стороне BC нужно взять точку K такую, чтобы точки B, T, N и C лежали на одной окружности?

Решение. Анализ показывает, что $\angle ANT=B$ (так как $\angle CNT=180°-B$) — *рис. 10*. Поэтому строим произвольно N_1T_1 ($N_1 \in AC$ и $T_1 \in AB$) так, чтобы $\angle AN_1T_1=B$. Находим точку E_1 — середину N_1T_1. Прямая AE_1 пересекает BC в искомой точке K. Действительно, треугольники AN_1T_1 и ANT гомотетичны с центром гомотетии в вершине A.



■ Рис. 10

Прежде чем перейти к задачам для самостоятельного решения, заметим, что разговор может быть продолжен, если через точку K на стороне BC провести отрезки параллельно медианам треугольника: $KP \parallel BD$ и $KQ \parallel CF$ (*рис. 11*).

Задача 10. Пусть BD и CF — медианы треугольника ABC. Через точку K на стороне BC проведены отрезки $KP \parallel BD$ и $KQ \parallel CF$ ($P \in AC$ и $Q \in AB$). Докажите, что отрезок PQ делится медианами на три равные части.

Доказательство. Покажем, что $PL=LG=GQ$ (*рис. 11*). Пусть $M=BD \cap CF$ — центроид в треугольнике ABC. Пусть также $H=PK \cap CF$. Подобие треугольников PHL и PKQ дает следующую пропорцию:

$$\frac{PL}{PQ}=\frac{PH}{PK}. \quad (1)$$

Поскольку $PK \parallel DB$, то

$$\frac{PH}{PK}=\frac{DM}{DB}. \quad (2)$$

Сравнив (1) и (2), запишем:

$$\frac{PL}{PQ}=\frac{DM}{DB}.$$