Инверсия + симметрия

Ивлев Федор

1. Окружность γ вписана в угол ABC треугольника ABC и касается его описанной окружности внутренним образом в точке P. Обозначим ее точки касания со сторонами AB и BC через X и Y; I — центр вписанной окружности треугольника ABC. Пусть также вневписанная в угол B окружность треугольника ABC касается стороны AC в точке Q. a) Докажите, что $\angle ABP = \angle CBQ$. b) Докажите, что I лежит на прямой XY.

2. Пусть Γ — описанная окружность треугольника ABC. Окружность с центром в точке O касается отрезка BC в точке P, и дуги BC Γ, не содержащей точки A в точке Q. Докажите, что, если $\angle BAO = \angle CAO$, то $\angle PAO = \angle QAO$.

Japan Mathematical Olympiad Finals 2009 problem 4 of 5

3. Углы AOB и COD совмещаются поворотом так, что луч OA совмещается с лучом OC, а луч OB — с OD. В них вписаны окружности, пересекающиеся в точках E и F. Докажите, что углы AOE и DOF равны.

турнир 2004 осенний сложный вариант номер 7 (П.Кожевников, И.Богданов)

4. В треугольнике ABC проведена биссектриса BD (точка D лежит на отрезке AC). Прямая BD пересекает окружность ω, описанную около треугольника ABC, в точках B и E. Окружность ω, построенная на отрезке DE как на диаметре, пересекает окружность ω в точках E и F. Докажите, что прямая, симметричная прямой BF относительно прямой BD, содержит медиану треугольника ABC.

ВМО 2009.9-10.2 (Л.Емельяов)

5. Боковые стороны AB и CD трапеции $ABCD$ являются хордами касающихся окружностей ω_1 и ω_2 соответственно. Градусные меры касающихся дуг AB и CD равны соответственно α и β. Пусть ω_3 и ω_4 — также окружности с хордами AB и CD соответственно, но градусные меры аналогичных дуг AB и CD равны соответственно β и α. Докажите, что ω_3 и ω_4 тоже касаются.

турнир 2012 весенний сложный тур 10-11.5 (Ф.Ивлев)

6. В углы B и C треугольника ABC вписаны непересекающиеся окружности ω и γ с центрами P и Q. Оказалось, что $\angle BAQ = \angle CAP$. Докажите, что окружность, касающаяся γ и ω внешним образом и проходящая через A, касается и описанной окружности треугольника ABC.

личная олимпиада на Кубке Колмогорова 2012 старших (Ивлев Ф.)

7. В окружность Ω вписан остроугольный треугольник ABC, в котором $AB > BC$. Пусть P и Q — середины меньшей и большей дуг AC окружности Ω, соответственно. Пусть M — основание перпендикуляра, опущенного из точки Q на отрезок AB. Докажите, что окружность, описанная около треугольника BMC, делит пополам отрезок BP.

региональный этап ВМО 2013.4.11.4 (Ф.Ивлев)

8. Обозначим середины стороны AB, BC и AC треугольника ABC через C_0, A_0 и B_0 соответственно, а центр описанной окружности через O. Окружности, описанные около треугольников AOB и $A_0B_0C_0$ пересекаются в точках P и Q. Докажите, что $\angle ABQ = \angle CBP$.

сербская национальная олимпиада 2013.3

9. Пусть M и N — соответственно середины большой и маленькой дуги BC описанной окружности остроугольного треугольника ABC. Из вершины B проведена высота BH. Точка K на прямой AN выбрана таким образом, что $\angle KHM = 90°$. Докажите, что $BN = BK$.

10. Дан неравнобедренный треугольник ABC. Пусть N — середина дуги BAC его описанной окружности, а M — середина стороны BC. Обозначим через I_1 и I_2 центры вписанных окружностей треугольников ABM и ACM соответственно. Докажите, что точки I_1, I_2, A, N лежат на одной окружности.

ВМО 2011.5.11.8 (М.Кунгожин)

11. В описанной окружности ω треугольника ABC проведена хорда XY параллельная BC и располагающаяся между точкой A и прямой BC. Окружности γ_1 и γ_2 касаются этой хорды, окружности ω и сторон AB и AC соответственно, причем расположены между прямыми BC и XY. Докажите, что общие a) внешние (b) внутренние) касательные к эти окружностям пересекаются в точке, лежащей на a) внешней (b) внутренней) биссектрисе угла A.

Romanian Masters in Mathematics 2011 (В.Мокин, Ф.Ивлев)