Избранные задачи Фёдора Ивлева

1 (по мотивам совместного проекта с В. Мокиным). Пусть вписанная окружность треугольника ABC касается его сторон AB и BC в точках C' и A'. Прямые AA' и CC' пересекаются в точке G. Обозначим точку Фейербаха треугольника через F, а центр вписанной окружности через I. Тогда, если точки A, C, G и I лежат на одной окружности, то A_1FC_1G — параллелограмм.

2 (весенний Турнира Городов 2011г. сложный вариант). Боковые стороны AB и CD трапеции $ABCD$ являются хордами касающихся окружностей ω_1 и ω_2 соответственно. Градусные меры касающихся дуг AB и CD равны соответственно α и β. Пусть ω_3 и ω_4 — также окружности с хордами AB и CD соответственно, но градусные меры аналогичных дуг AB и CD равны соответственно β и α. Докажите, что ω_3 и ω_4 тоже касаются.

3 (заочный тур геометрической олимпиады, 2010 г.). Вписанная окружность остроугольного треугольника ABC касается его сторон AB, BC, CA в точках C_1, A_1, B_1 соответственно. Пусть A_2, B_2 — середины отрезков B_1C_1, A_1C_1 соответственно, O — центр описанной окружности треугольника, P — одна из точек пересечения прямой CO с вписанной окружностью. Прямые PA_2 и PB_2 вторично пересекают вписанную окружность в точках A_0 и B_0. Докажите, что прямые AA_0 и BB_0 пересекаются на высоте треугольника, опущенной на AB.