Биссектрисы, высоты и описанная окружность.

П.А. Кожевников

Дан треугольник ABC; Ω — его описанная окружность, O — центр Ω; A', B', C' — середины дуг BC, CA, AB, не содержащих A, B, C соответственно; I — центр вписанной окружности.

1. Докажите, что треугольники $AB'C'$ и $IB'C'$ симметричны относительно прямой $B'C'$.

2. Докажите, что AA', BB', CC' — высоты треугольника $A'B'C'$.

3. (Лемма о трезубце) Докажите, что $A'I = A'B = A'C$.

4. а) Докажите, что диагонали шестиугольника в пересечении треугольников ABC и $A'B'C'$ пересекаются в точке I и параллельны сторонам треугольника ABC.

   б) Пусть γ_c — окружность с центром C', касающаяся прямой AB. Аналогично определим окружность γ_b. Докажите, что прямая, проходящая через I параллельно BC, является общей касательной к окружностям γ_b и γ_c. (М. Сонкин, Всероссийская олимпиада 1999 г.)

5. Докажите, что $\frac{S(ABC)}{S(A'B'C')} = \frac{2r}{R}$. (Р. Мазов, задачник к Квантак, №10, 1982 г.)

   Пусть гомотетия с центром I и коэффициентом 2 переводит треугольник $A'B'C'$ в треугольник $I_aI_bI_c$.

6. Докажите, что I_a, I_b, I_c — центры вневписанных окружностей треугольника ABC.

   Пусть A'', B'', C'' — середины дуг BAC, CBA, ACB окружности Ω соответственно.

7. Докажите, что A'', B'', C'' — середины отрезков I_bI_c, I_cI_a, I_aI_b.

   Пусть ω касается сторон BC, CA, AB в точках A_1, B_1, C_1 соответственно.

8. Докажите, что следующие три прямые пересекаются в одной точке:

   а) A_1A', B_1B', C_1C';

   б) A_1A'', B_1B'', C_1C''. (М. Сонкин, Всероссийская олимпиада 1998 г.)

9. Докажите, что прямая IO проходит через ортоцентр треугольника $A_1B_1C_1$.