Избранные задачи П. А. Кожевникова

1 (**Всероссийская олимпиада, 1993).** На диагонали AC ромба $ABCD$ взята произвольная точка E, отличная от точек A и C, а на прямых AB и BC — точки N и M соответственно так, что $AE = NE$ и $CE = ME$. Пусть K — точка пересечения прямых AM и CN. Докажите, что точки K, E и D лежат на одной прямой.

2 (**Турнир Городов, 1998).** Отрезок AB пересекает две равные окружности и параллелен их линии центров, причем все точки пересечения прямой AB с окружностями лежат между A и B. Через точку A проводятся касательные к окружности, ближайшей к A, через точку B — касательные к окружности, ближайшей к B. Оказалось, что эти четыре касательные образуют четырехугольник, содержащий внутри себя обе окружности. Докажите, что в этот четырехугольник можно вписать окружность.

3 ((**задачник Кванта 3-2008).** На ребрах AB, BC, CD, DA тетраэдра $ABCD$ взяты точки K, L, M, N соответственно. Точки K', L', M', N' симметричны точкам K, L, M, N относительно середин ребер AB, BC, CD, DA соответственно. Докажите, что объемы тетраэдров $KLMN$ и $K'L'M'N'$ равны.

4 (**Международная олимпиада, 1999).** Две окружности ω_1 и ω_2, содержащиеся внутри окружности ω, касаются ω в различных точках M и N соответственно. Окружность ω_1 проходит через центр окружности ω_2. Прямая, проходящая через две точки пересечения окружностей ω_1 и ω_2, пересекает окружность ω в точках A и B. Прямые MA и MB пересекают ω_1 в точках C и B соответственно. Докажите, что CD касается ω_2.

5. Окружности ω_b , ω_c — вневписанные для треугольника ABC (т.е. ω_b и ω_c касаются соответственно сторон AC и AB и продолжений двух других сторон). Окружность ω_b' симметрична ω_b относительно середины стороны AC, окружность ω_c' симметрична ω_c относительно середины стороны AB. Докажите, что прямая, проходящая через точки пересечения окружностей ω_b' и ω_c', делит периметр треугольника ABC пополам.

6. Докажите, что выпуклый многоугольник может быть разрезан непересекающимися диагоналями на остроугольные треугольники не более, чем одним способом.

7. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность ω, а его диагонали пересекаются в точке K. Точки M_1 , M_2 , M_3 , M_4 — середины дуг AB, BC, CD, DA (не содержащих других вершин четырехугольника) соответственно. Точки I_1 , I_2 , I_3 , I_4 — центры окружностей, вписанных в треугольники ABK, BCK, CDK, DAK соответственно. Докажите, что прямые M_1I_1 , M_2I_2 , M_3I_3 , M_4I_4 пересекаются в одной точке.