Полярное соответствие.

П.А. Кожевников

Чтобы по-настоящему понять природу полярного соответствия, нужно быть знакомым с проективной геометрией. Мы же делаем попытку познакомиться с полярным соответствием и воспользоваться его свойствами без привлечения проективной геометрии. Введем нужные нам определения и обозначения. Пусть на плоскости фиксирована точка O и окружность ω радиуса R с центром в O.

Определение. Для каждой точки $X \neq O$ на луче OX строим такую точку X', что $OX \cdot OX' = R^2$. (Говорят, что X' и X *инверсны* относительно окружности ω.) Через точку X' проведем прямую x, перпендикулярную OX'. Прямая x называется *полярой* точки X, а точка X называется *полюсом* прямой x. Соответствие $X \leftrightarrow x$ является взаимно однозначным соответствием между точками, отличными от O, и прямыми, не проходящими через O. Это соответствие и называется *полярным соответствием.* (Ниже обозначаем точки (полюсы) большими латинскими буквами, а их поляры — соответствующими маленькими буквами: $A \leftrightarrow a$, $B \leftrightarrow b$, $C \leftrightarrow c$, $\ldots$.)

Установите два основных *свойства полярного соответствия.*

П1. (Двойственность.) $A \in b \iff B \in a$.

П2. Пусть две секущие m и l, проходящие через точку A ($A \notin \omega$), пересекают ω в точках M_1, M_2 и L_1, L_2. Тогда $M_1L_1 \cap M_2L_2 \in a$ или $M_1L_1 \parallel M_2L_2 \parallel a$.[1]

Докажите следующие факты.

В1. Если $A \in \omega$, то a — это касательная к ω, проведенная через A.

В2. Если точка A расположена вне окружности ω, то a проходит через точки касания с ω касательных, проведенных через A.

В3. Если O, A, B не лежат на одной прямой, то $a \cap b \leftrightarrow AB$.

В4. Точки A, B, C лежат на одной прямой $\iff$ a, b, c проходят через одну точку или параллельны.

Задачи.

1. Даны окружность ω и прямая l, не имеющие общих точек. Из точки X, которая движется по прямой l, проводятся касательные XA, XB к ω. Докажите, что все хорды AB имеют общую точку.

2. (Симметричная бабочка) а) Дана точка A на диаметре BC полуокружности ω. Точки X, Y на ω таковы, что $\angle XAB = \angle YAC$. Докажите, что прямые XY проходят через одну точку или параллельны.

   б) Точки A и A' инверсны относительно окружности ω, причем A' — внутри ω. Через A' проводятся хорды XY. Докажите, что центры вписанной и одной из вневписанных окружностей треугольника AXY фиксированные. (С. Маркелов, см. книгу Шарыгин, Геометрия 9—10.)

3. (Основное свойство симедианы) Касательные к описанной окружности треугольника ABC, проведенные через точки B и C, пересекаются в точке P. Докажите, что AP — симедиана (прямая, симметричная медиане AM относительно биссектрисы угла A).

4. (Гармонический четырехугольник) Пусть четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность ω. Известно, что касательные к ω, проведенные в точках A и C, пересекаются на прямой BD или параллельны BD. Докажите, что касательные к ω, проведенные в точках B и D, пересекаются на прямой AC или параллельны AC.

В следующих трех задачах дан четырехугольник $ABCD$, у которого диагонали пересекаются в точке P, продолжения сторон AB и CD — в точке R, продолжения сторон BC и DA — в точке Q.

[1] Это свойство можно доказать с помощью проективного преобразования или вычислением. Если даже у Вас сходу не получилось это доказать, можно перейти к задачам и ссылаться на это свойство.

5. (Вписанный четырехугольник) Пусть четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром O. Докажите, что четверка точек O, P, Q, R — ортоцентрическая (то есть каждая точка — ортоцентр треугольника с вершинами в оставшихся трех).

6. (Описанный четырехугольник) Пусть четырехугольник $ABCD$ описан около окружности; K, L, M, N — точки касания с окружностью сторон AB, BC, CD, DA соответственно; прямые KL и MN пересекаются — в точке S, а прямые LM и NK — в точке T.

   а) Докажите, что Q, R, S, T лежат на одной прямой.

   б) Докажите, что KM и LN пересекаются в точке P.

7. (Вписанно-описанный четырехугольник) Четырехугольник $ABCD$ описан около окружности ω с центром I и вписан в окружность Ω с центром O.

   а) Докажите, что O, I, P лежат на одной прямой.

   б) Зафиксируем ω и Ω и рассмотрим всевозможные четырехугольники $ABCD$, описанные около окружности ω и вписанные в окружность Ω (согласно теореме Понселе, если хотя бы один такой четырехугольник существует, то таких четырехугольников бесконечно много). Докажите, что для всех таких четырехугольников точки P совпадают, а также, что прямые QR совпадают.

8. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AH_a, BH_b и CH_c, пересекающиеся в точке H. Прямые H_aH_c и AC пересекаются в точке D. Докажите, что прямая DH перпендикулярна медиане, проведенной из вершины B.

9. Дан треугольник ABC, вписанная окружность которого касается сторон AC и AB в точках B_1 и C_1. Докажите, что проекция C на биссектрису угла ABC лежит на B_1C_1.

10. В окружности фиксирована хорда MN. Для каждого диаметра AB этой окружности рассмотрим точку, в которой пересекаются прямые AM и BN, и проведем через нее прямую l, перпендикулярную AB. Докажите, что все прямые l проходят через одну точку. (Е. Куланин, Турнир городов 1991 г.)