# Обобщенная теорема Наполеона.

П.А. Кожевников

Классическая теорема Наполеона гласит, что центры правильных треугольников, построенных на сторонах произвольного треугольника вне его, являются вершинами равностороннего треугольника.

Предлагаем для решения серию задач, внешне не имеющих никакой связи с теоремой Наполеона. Можно решать задачи любыми методами, а затем познакомиться с обобщением теоремы Наполеона и получить решения задач как следствия этого сильного факта.

**Задачи.**

1. Докажите, что центры квадратов, построенных на сторонах параллелограмма вне его, являются вершинами квадрата.

2. На боковых сторонах трапеции $ABCD$ построены треугольники $ABE$ и $CDF$ так, что $AE \parallel CF$ и $BE \parallel DF$. Докажите, что если $E$ лежит на стороне $CD$, то $F$ лежит на стороне $AB$.

3. а) Две окружности пересекаются в точках $A$ и $B$. Через точку $A$ проведена прямая, вторично пересекающая первую окружность в точке $C$, а вторую — в точке $D$ (можно считать, что точки $C$ и $D$ лежат по разные стороны от точки $A$). Пусть $M$ и $N$ — середины дуг $BC$ и $BD$, не содержащих точку $A$, а $K$ — середина отрезка $CD$. Докажите, что угол $MKN$ прямой. (Д. Терешин. Всероссийская олимпиада 1997 г.)

   б) Круг поделили хордой $AB$ на два круговых сегмента и один из них повернули вокруг точки $A$ на некоторый угол. Пусть при этом повороте точка $B$ перешла в точку $D$. Докажите, что отрезки, соединяющие середины дуг сегментов с серединой отрезка $BD$, перпендикулярны друг другу. (З. Насыров. Задачник „Кванта“ №2, 1992 г.)

4. Через вершину $A$ треугольника $ABC$ проведены прямые $l_1$ и $l_2$, симметричные относительно биссектрисы угла $A$. Докажите, что проекции точек $B$ и $C$ на $l_1$ и $l_2$ соответственно, середина стороны $BC$ и основание высоты, опущенной из вершины $A$, лежат на одной окружности.

5. Во вписанном четырехугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке $E$, точки $K$ и $M$ — середины сторон $AB$ и $CD$, точки $L$ и $N$ — проекции $E$ на $BC$ и $AD$. Докажите, что $KM \perp LN$.

6. По двум окружностям, пересекающимся в точках $P$ и $Q$, одновременно начали движение с равными угловыми скоростями из точки $P$ два велосипедиста $A$ и $B$: один едет по часовой стрелке, другой — против часовой стрелки. Докажите, что $A$ и $B$ все время равноудалены от фиксированной точки. (Задача о велосипедистах, случай движения в разные стороны. Н. Васильев, И. Шарыгин. Задачник „Кванта“ №12, 1979 г.)

7. В остроугольном треугольнике $ABC$ точка $K$ — середина $AC$. На сторонах $AB$ и $BC$ как на основаниях внутрь треугольника построены равнобедренные треугольники $ABM$ и $BCN$ так, что $AM = BM$, $\angle AMB = \angle AKB$ и $BN = CN$, $\angle BNC = \angle BKC$. Докажите, что окружность, описанная около треугольника $MNK$, касается стороны $AC$. (А. Антропов, М. Урьев. XVII-й кубок памяти Колмогорова, задачник „Кванта“ №2, 2015 г.)

8. На описанной окружности треугольника $ABC$ взяты точки $A_1$, $B_1$, $C_1$ так, что $AA_1$, $BB_1$ и $CC_1$ пересекаются в одной точке. При отражении $A_1$, $B_1$, $C_1$ относительно сторон $BC$, $CA$, $AB$ соответственно получаются точки $A_2$, $B_2$, $C_2$. Докажите, что треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ подобны. (А. Заславский. Геометрическая олимпиада им. И. Ф. Шарыгина 2009 г.)

**Формулировка обобщенной теоремы Наполеона.**

Через $\angle(\vec{a}, \vec{b})$ будем обозначать угол поворота от вектора $\vec{a}$ до вектора $\vec{b}$, отсчитываемый против часовой стрелки; этот угол определен с точностью до прибавления $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Пусть на сторонах треугольника $ABC$ построены такие треугольники (возможно вырожденные) $BCA_1$, $CAB_1$, $ABC_1$, что выполнены условия:

1) $\angle(\overrightarrow{A_1B}, \overrightarrow{A_1C}) + \angle(\overrightarrow{B_1C}, \overrightarrow{B_1A}) + \angle(\overrightarrow{C_1A}, \overrightarrow{C_1B}) = 0$;

2) $AB_1 \cdot BC_1 \cdot CA_1 = BA_1 \cdot CB_1 \cdot AC_1$.

Тогда углы треугольника $A_1B_1C_1$ находятся из равенств:

$$\begin{aligned}
\angle(\overrightarrow{A_1C_1}, \overrightarrow{A_1B_1}) &= \angle(\overrightarrow{BC_1}, \overrightarrow{BA}) + \angle(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB_1});\\
\angle(\overrightarrow{B_1A_1}, \overrightarrow{B_1C_1}) &= \angle(\overrightarrow{CA_1}, \overrightarrow{CB}) + \angle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC_1});\\
\angle(\overrightarrow{C_1B_1}, \overrightarrow{C_1A_1}) &= \angle(\overrightarrow{AB_1}, \overrightarrow{AC}) + \angle(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA_1}).
\end{aligned}$$

Таким образом, в теореме утверждается, что при выполнении условий 1) и 2) углы треугольника $A_1B_1C_1$ зависят лишь от углов треугольников, построенных на сторонах треугольника $ABC$, и не зависят от углов самого треугольника $ABC$. Условие теоремы может быть описано также таким изящным образом (см. [1]): пусть даны точки $M, N, P, T$ и на сторонах треугольника $ABC$ строятся треугольники $ABC_1$, $BCA_1$, $CAB_1$, подобные с сохранением ориентации соответственно треугольникам $MNT$, $NPT$, $PMT$. Конструкция из обобщенной теоремы Наполеона интересна, в ней можно обнаружить еще несколько красивых фактов, например: окружности $ABC_1$, $BCA_1$, $CAB_1$ и $A_1B_1C_1$ имеют общую точку (отсюда можно понять, что на самом деле в этой конструкции треугольники $ABC_1$, $BCA_1$, $CAB_1$ и $A_1B_1C_1$ равноправны).

## Список литературы


[1] Н. И. Белухов. О некоторых парах перспективных треугольников. Математическое просвещение, треться серия, выпуск 14, 2010.