<u>Средняя линия прямоугольного треугольника и его точки Фейербаха.</u>

<u>Лемма 1.</u> Пусть M - середина гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC, I - центр его вписанной окружности радиуса r, AB = c, BC = a < AC, K - точка пересечения прямых MI и AC.

Тогда AK = cr/(a - 2r).

Обозначим через M_b и B_I проекции точек M и I на катет AC длины b, а длину отрезка M_bK - через x (рис.1).

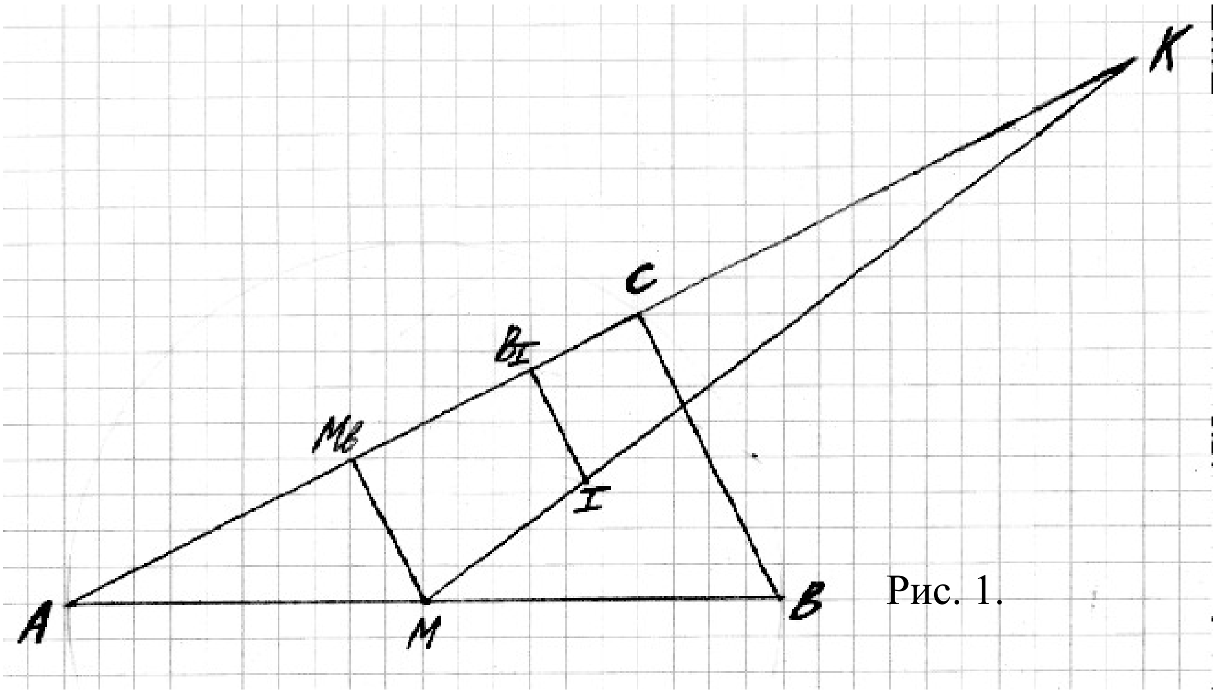

Рис. 1.

Тогда из подобия прямоугольных треугольников MM_bK и IB_IK находим $MM_b/IB_I = M_bK/B_IK$ (1).

Но $MM_b = 1/2BC = a/2$ как средняя линия треугольника ABC, а $B_IK = M_bK - M_bB_I = M_bK - (M_bC - B_IC) = x - (b/2 - r) = x + r - b/2$.

Теперь равенство (1) можно переписать в следующем виде $a/2r = x/(x + r - b/2)$, откуда $x= a/2(b/2 - r)/(a/2 - r)$ и $AK = AM_b + M_bK = b/2 + x = a/2(b/2 - r)/(a/2 - r) + b/2 =$
$(ab/4 - ar/2 +ab/4 - br/2)/(a/2 - r) = (ab/2 - r/2(a + b))/(a/2 - r) =$
$(ab - r(a + b))/(a - 2r) = (2pr - r(a + b))/(a - 2r) = r(2p - a - b)/(a - 2r) =$
$r(a +b + c - a - b)/(a - 2r) = rc/(a - 2r) = cr/(a - 2r)$.

<u>Лемма 2.</u> Пусть a и b - длины катетов прямоугольного треугольника, r - радиус его вписанной окружности.

Тогда $ar = (a - 2r)(b - r)$.

Запишем очевидное равенство $4pr = 4S$, где $S = 1/2ab$ - площадь прямоугольного треугольника с катетами a и b.

Так как в прямоугольном треугольнике $r = p - c$, то $c = p - r$ и $2(a + b + c)r = 2(a + b + p - r)r = 4S$

или $2ar + 2br + 2pr - 2r^2 = 4S$, $2ar = 4S - 2pr - 2br + 2r^2 =$
$2S - 2br + 2r^2$, $ar = ab - 2br + 2r^2 - ar = b(a - 2r) - r(a - 2r) =$
$(a - 2r)(b - r)$.

<u>Лемма 3.</u> Пусть H_b - ортоцентр треугольника $A_bB_bC_b$ с вершинами в точках касания вневписанной окружности I_b прямоугольного треугольника ABC с продолжением катета BC, катетом AC и продолжением гипотенузы AB.

Тогда $CH_b = CB_b = b - r$, где $b = AC$, r - радиус вписанной окружности треугольника ABC.

Согласно предложению 1 из [1] точка H_b лежит на отрезке B_bA_c, где A_c - точка касания вневписанной окружности I_c прямоугольного треугольника ABC с продолжением катета BC (рис.2), но $\angle B_bA_cC = 1/2\angle ABC = \beta/2$ (см. теорему 1 из [2]), поэтому $\angle A_cB_bC = 90° - \angle B_bA_cC = 90° - \beta/2 = \alpha + \beta - \beta/2 = \alpha + \beta/2$.

Учитывая то, что угол B_bH_bC - внешний угол треугольника A_cH_bC, получим, что $\angle B_bH_bC = \angle H_bCA_c + \angle H_bA_cC = \alpha + \beta/2 = \angle A_cB_bC$ и $CH_b = CB_b = CA - AB_b = b - r$.

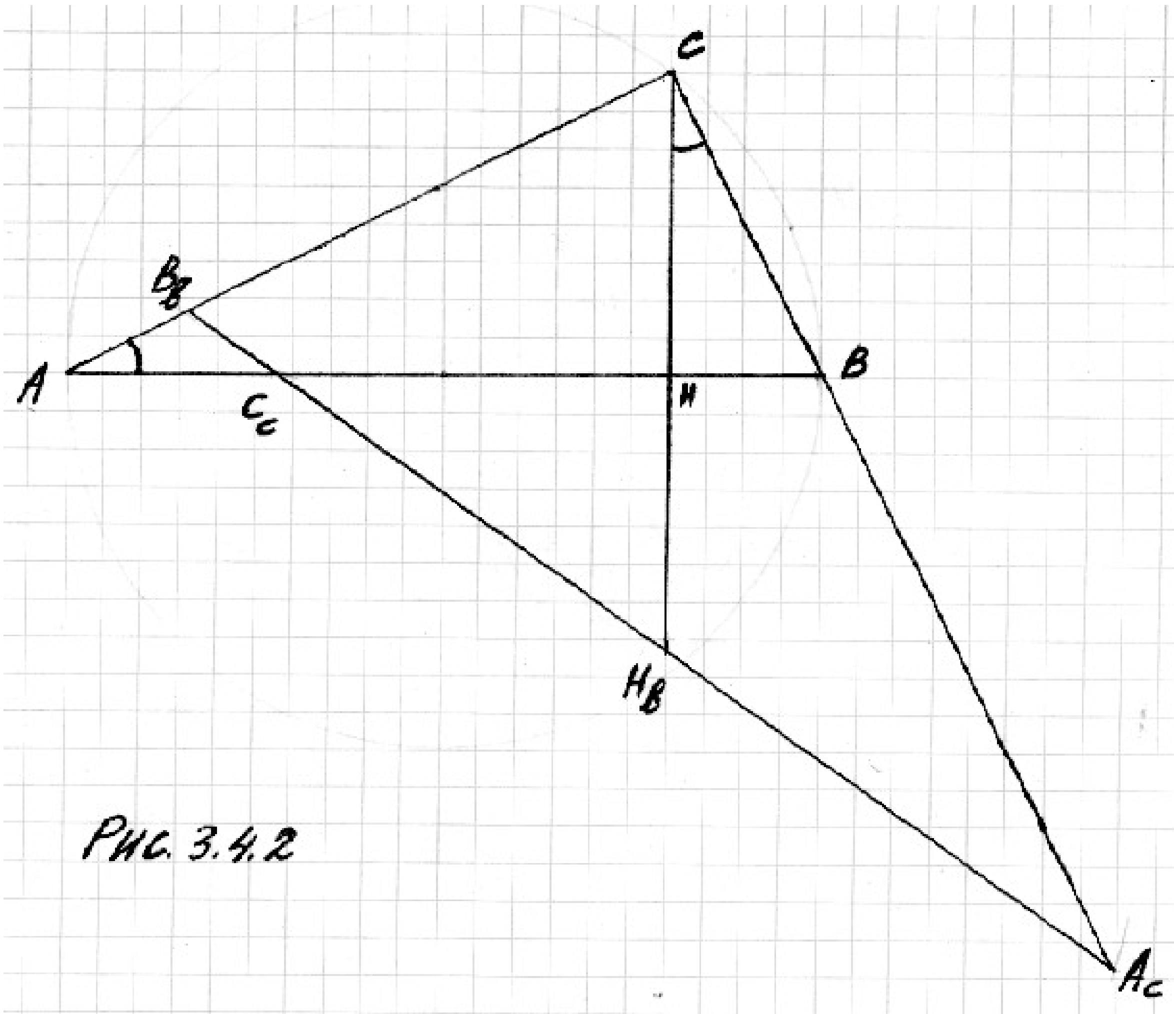

Рис. 2

<u>Предложение 1.</u> В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла C опущена высота CH, M_a - середина катета BC, I_2 - центр вписанной окружности треугольника BCH, H_b - ортоцентр треугольника $A_bB_bC_b$ с вершинами в точках касания вневписанной окружности I_b прямоугольного треугольника ABC с его стороной и продолжениями сторон.

Тогда точки M_a, I_2, H_b лежат на одной прямой.

Треугольник BCH подобен треугольнику ABC с коэффициентом подобия $k = BC/AB = a/c$, поэтому по лемме 1 длина отрезка CP, где P - точка пересечения прямых M_aI_2 и CH (рис.3), равна $k \times AK = (a/c) \times c \times r/(a - 2r) = a \times r/(a - 2r)$.

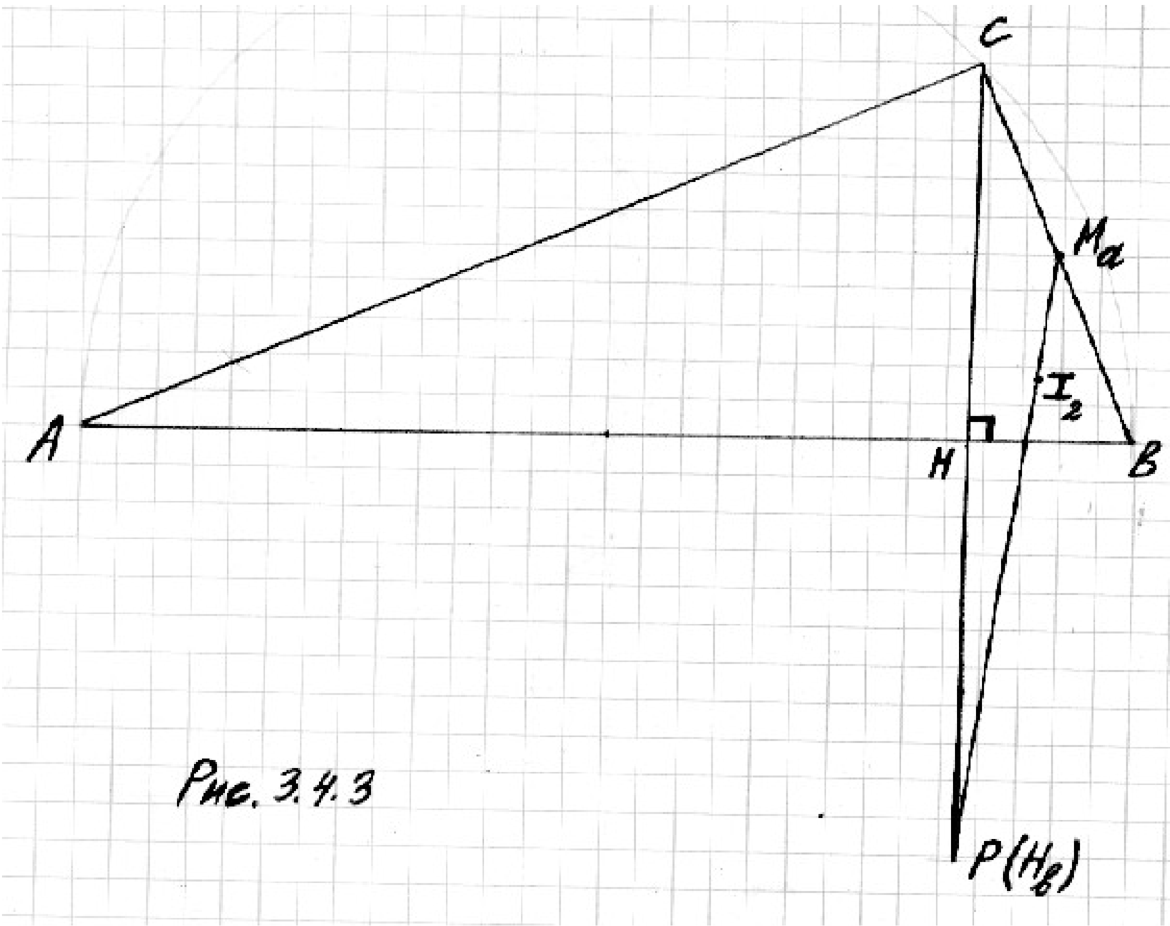

Рис. 3

Но по лемме 2 $ar = (a - 2r)(b - r)$ и $CP = ar/(a - 2r) = (a - 2r)(b - r)/(a - 2r) = b - r$. По лемме 3 $CH_b = b - r = CP$. Равенство $CH_b = CP$ означает, что точки P и H_b совпадают, но P - точка, в которой прямая M_aI_2 пересекает прямую CH.

Отсюда следует, что точки M_a, I_2, H_b лежат на одной прямой.

<u>Теорема 1.</u> Вписанная окружность I и три вневписанные окружности I_a, I_b, I_c прямоугольного треугольника ABC ($\angle ACB = 90°$) касаются прямых BC, CA, AB соответственно в точках A_I, B_I, C_I; A_a, B_a, C_a; A_b, B_b, C_b; A_c, B_c, C_c; H_I, H_a, H_b, H_c - ортоцентры треугольников $A_IB_IC_I$, $A_aB_aC_a$, $A_bB_bC_b$, $A_cB_cC_c$ соответственно, M_a и M_b - середины катетов BC и AC.

Тогда прямые M_aH_b и M_bH_a пересекаются в точке Фейербаха F прямоугольного треугольника ABC, а прямые M_bH_a и M_aH_b - в точке Фейербаха F_c, причем точки Фейербаха F и F_c совпадают с основаниями высот треугольника $M_aM_bH_b$, проведенных соответственно из вершин M_b и M_a, а точка H_a - с ортоцентром треугольника $M_aM_bH_b$.

Аналогично, прямые M_aH_I и M_bH_c пересекаются в точке Фейербаха F_b прямоугольного треугольника ABC, а прямые M_bH_I и M_aH_c - в точке Фейербаха F_a, причем точки Фейербаха F_a и F_b совпадают с основаниями высот треугольника $M_aM_bH_c$, проведенных из вершин M_b и M_a, а точка H_I - с ортоцентром треугольника $M_aM_bH_c$.

Соединим точки M_a и H_b отрезком прямой (рис.4). Из предложения 1 следует, что центр I_2 вписанной окружности треугольника BCH, где H - основание высоты, опущенной из вершины прямого угла C на гипотенузу AB, лежит на отрезке M_aH_b.

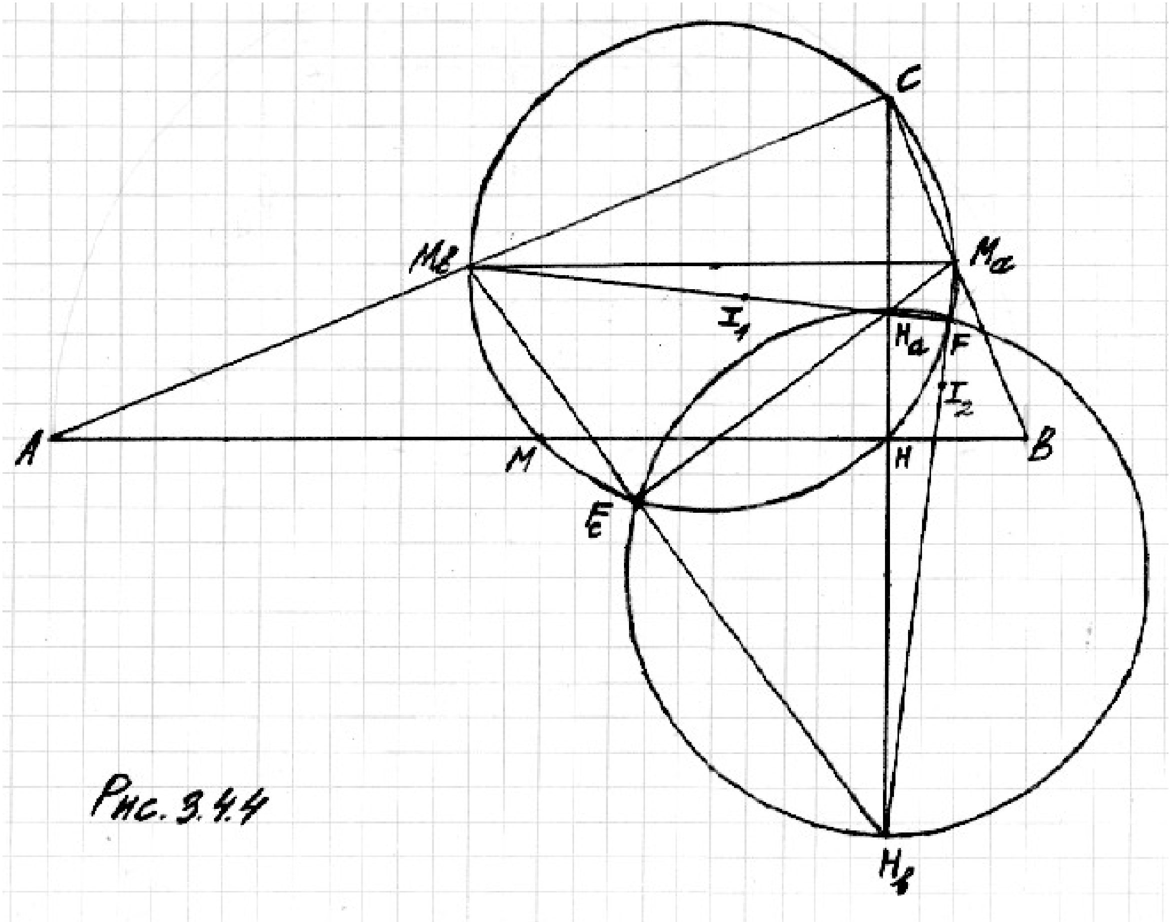

Рис. 4

Но M_a - центр описанной окружности прямоугольного треугольника BCH, поэтому прямая M_aH_b проходит через внутреннюю точку Фейербаха F прямоугольного треугольника ABC (см. следствие 3 и задачу 3 из [4]).

Итак, точки M_a, F, H_b лежат на одной прямой. Поскольку M_aM_b - диаметр окружности Эйлера треугольника ABC, то $\angle M_aFM_b = 90°$ и $\angle M_bFH_b = 180° - \angle M_bFM_a = 180° - 90° = 90°$.

Так как H_aH_b - диаметр окружности шести точек S'_c, проходящей через точку F, то $\angle H_aFH_b = 90° = \angle M_bFH_b$. Последнее равенство означает, что точки M_b, H_a и F лежат на одной прямой.

Пусть L - середина CH. Поскольку H_bL и M_bF - высоты треугольника $M_aM_bH_b$, пересекающиеся в точке H_a, то прямая M_aH_a содержит третью высоту этого треугольника, т.е. $M_aH_a \perp M_bH_b$.

Обозначим через P точку пересечения прямых M_aH_a и H_bM_b. Тогда $\angle M_bPM_a = \angle H_bPH_a = 90°$ и поэтому точка P лежит одновременно на окружности Эйлера треугольника ABC и на окружности шести точек S'_c этого треугольника, т.е. совпадает с одной из двух точек их пересечения.

По теореме 7 из [3] точки Фейербаха F и F_c лежат на окружности S'_c. Отсюда следует, что точки пересечения окружности S'_c с окружностью Эйлера треугольника ABC совпадают с точками Фейербаха F и F_c. Так как точка F не лежит на прямой M_bH_b, то это означает, что точка P совпадает с точкой F_c.

Таким образом, точки F и F_c являются основаниями высот M_bF и M_aF_c треугольника $M_aM_bH_b$, пересекающихся в точке H_a.

Для того, чтобы доказать аналогичные факты для треугольника $M_aM_bH_c$, достаточно установить, что, например, точки M_a, H_I, F_b лежат на одной прямой, соответствующим образом переформулировав и передоказав леммы 1 - 3 и предложение 1 для случая вневписанной окружности, после чего нужно воспользоваться тем, что точки Фейербаха F_a и F_b лежат на окружности шести точек S_c прямоугольного треугольника ABC (см. теорему 5 из [3]).

<u>Теорема 2.</u> Центр E окружности Эйлера прямоугольного треугольника ABC, середина L его высоты, опущенной из вершины прямого угла и точки Фейербаха F и F_c лежат на одной окружности.

Точки E, L и внешние точки Фейербаха F_a и F_b также лежат на одной окружности.

Окружность Эйлера треугольника $M_aM_bH_b$ проходит через основания L, F, F_c его высот (см. теорему 1) и середину E его основания M_aM_b (рис.5). Аналогично, основания высот L, F_a, F_b треугольника $M_aM_bH_c$ и середина E его основания M_aM_b лежат на окружности Эйлера треугольника $M_aM_bH_c$.

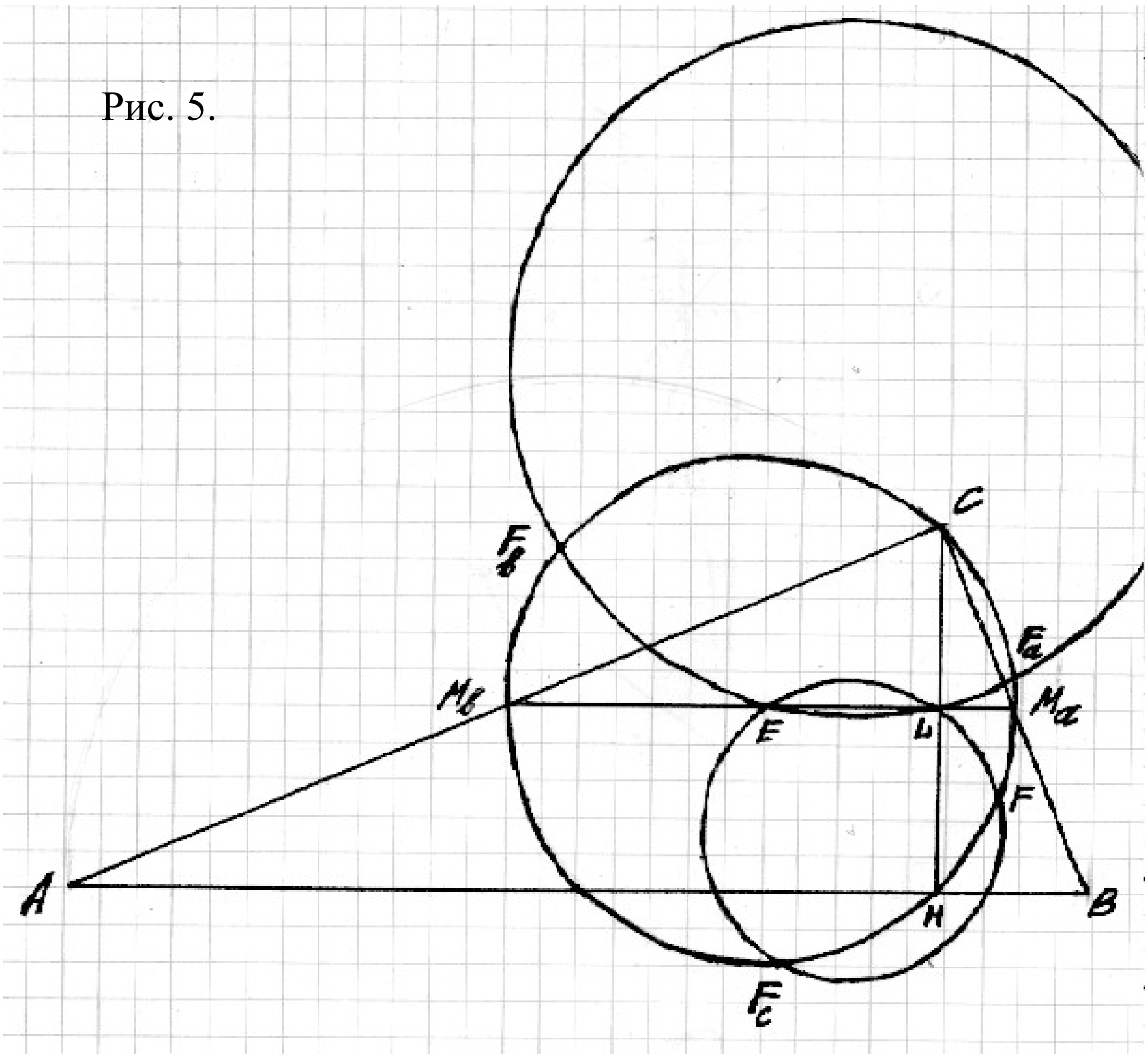

Рис. 5

Литература

1. Е.Д. Куланин. Ортоцентрические четверки прямоугольного треугольника. Журнал "Математическое образование", №3, 2007.
2. Е.Д. Куланин. Прямоугольный треугольник. Журнал "Математическое образование", №2, 2007.
3. Е.Д. Куланин. Прямые Эйлера и точки Фейербаха прямоугольного треугольника. Журнал "Математически форум", №5, 2007.
4. Е.Д. Куланин. О некоторых свойствах точек Фейербаха и Тебо. Приложение "Математика" к газете "Первое сентября", №3, 2005.