О прямых Симсона, кривой Штейнера и кубике Мак-Кэя

Е. Д. Куланин

В статье рассматриваются вопросы, затронутые в [3], а также приводится решение задачи 8.4 из задачника «Математического просвещения».

1. Вводные замечания

Напомним сначала некоторые определения. Пусть Р — точка в плоскости треугольника ABC, A_1, B_1, C_1 — основания перпендикуляров, опущенных из точки P на прямые BC, CA, AB соответственно. Тогда треугольник $A_1B_1C_1$ называется педальным треугольником точки P относительно треугольника ABC. Прямые, проходящие через вершину данного угла и симметричные относительно биссектрисы этого угла, называются изогональными относительно этого угла. Окружность, на которой лежат середины сторон треугольника, основания его высот и середины отрезков от вершин до точки пересечения высот (ортоцентра), называется окружностью Эйлера или окружностью девяти точек этого треугольника.

Приведем формулировки тех теорем из [3], которые понадобятся нам в этой статье. Желающие могут найти их доказательства в [3], для чего в скобках приводятся номера этих теорем, которые они имеют в [3].

Теорема 1 (7). Пусть P — точка, не лежащая на описанной окружности треугольника ABC. Тогда прямые, изогональные соответственно прямым PA, PB, PC относительно углов A, B, C этого треугольника, пересекаются в одной точке P'.

Точки P и P' называются изогонально сопряженными точками относительно треугольника ABC или просто изогональными точками.

В дальнейшем мы покажем, что если точка P лежит на описанной окружности треугольника ABC, то прямые, изогональные прямым PA, PB, PC относительно углов A, B, C, параллельны. Легко видеть, что центр описанной окружности треугольника и точка пересечения его высот изогонально сопряжены.

Теорема 2 (9). Пусть P и P' — точки, изогонально сопряженные относительно треугольника ABC, а $A_1B_1C_1$ и $A_1'B_1'C_1'$ — педальные треугольники этих точек. Тогда вершины треугольников $A_1B_1C_1$ и $A_1'B_1'C_1'$ лежат на одной окружности.

Так как центр O описанной окружности треугольника и точка H пересечения его высот изогональны, то из теоремы 2 сразу же вытекает, что середины сторон произвольного треугольника и основания его высот лежат на одной окружности. Обозначим через AH_1, BH_2, CH_3 высоты непрямоугольного треугольника ABC. Тогда треугольники AH_2H_3, BH_3H_1, CH_1H_2 подобны треугольнику ABC с коэффициентами подобия $\cos A$, $\cos B$, $\cos C$ соответственно.

Таким образом, треугольники AH_2H_3, BH_3H_1, CH_1H_2 являются уменьшенными копиями треугольника ABC, поэтому можно рассматривать точки, одинаково расположенные относительно подобных треугольников ABC, AH_2H_3, BH_3H_1, CH_1H_2.

Теорема 3 (10). Пусть A_1, B_1, C_1 — проекции точки P на стороны (или продолжения сторон) BC, CA, AB треугольника ABC; P_1, P_2, P_3 — точки, симметричные P относительно середин сторон B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 треугольника $A_1B_1C_1$; H_1, H_2, H_3 — основания высот AH_1, BH_2, CH_3 треугольника ABC. Тогда точки P, P_1, P_2, P_3 одинаково расположены по отношению к треугольникам ABC, AH_2H_3, BH_3H_1, CH_1H_2 соответственно.

Следствие 1. Пусть A_1, B_1, C_1 — проекции точки P на стороны (или продолжения сторон) BC, CA, AB треугольника ABC; H_1, H_2, H_3 — основания высот AH_1, BH_2, CH_3 треугольника ABC. Тогда точки P_1, P_2, P_3, одинаково расположенные с точкой P по отношению к треугольникам AH_2H_3, BH_3H_1, CH_1H_2, ABC, совпадают с ортоцентрами треугольников AB_1C_1, BC_1A_1, CA_1B_1.

Следствие 2 (5). Пусть H_1, H_2, H_3 — основания высот AH_1, BH_2, CH_3 треугольника ABC; точки P, P_1, P_2, P_3 одинаково расположены по отношению к треугольникам ABC, AH_2H_3, BH_3H_1, CH_1H_2 соответственно. Тогда треугольник $P_1P_2P_3$ равен педальному треугольнику $A_1B_1C_1$ точки P относительно треугольника ABC, причем стороны треугольников $P_1P_2P_3$ и $A_1B_1C_1$ соответственно параллельны.

Теорема 4 (10). Пусть P — произвольная точка в плоскости треугольника ABC, не лежащая на его описанной окружности; AH_1, BH_2, CH_3 — его высоты, пересекающиеся в точке H; E_1, E_2, E_3 — середины отрезков AH, BH, CH; P_1, P_2, P_3 — точки, одинаково расположенные с P относительно треугольников AH_2H_3, BH_3H_1, CH_1H_2, ABC соответственно. Тогда прямые E_1P_1, E_2P_2, E_3P_3 пересекаются в такой точке K

окружности Эйлера треугольника ABC, через которую проходит описанная окружность педального треугольника точки P относительно треугольника ABC.

2. Прямые Симсона

Рассмотрим теперь конфигурацию, изображенную на рис. 1. Проведем через ортоцентр H треугольника ABC прямую, которая пересечет описанные окружности треугольников AH_2H_3, BH_3H_1, CH_1H_2 в точках P_a, P_b, P_c соответственно.

Так как $\angle P_aHH_2 = \angle P_cHH_2 = \angle P_bHB$, а $\angle AH_2H_3 = \angle CH_2H_1 = \angle H_1BH_3$, то точки P_a, P_b, P_c одинаково расположены относительно подобных треугольников AH_2H_3, BH_3H_1, CH_1H_2. Пусть P — точка, одинаково расположенная с точками P_a, P_b, P_c относительно треугольников ABC, AH_2H_3, BH_3H_1, CH_1H_2; H_a, H_b, H_c — основания перпендикуляров, опущенных из точки P на прямые BC, CA, AB соответственно. Тогда согласно следствию 1 точки P_b, P_c, P_a совпадают с ортоцентрами

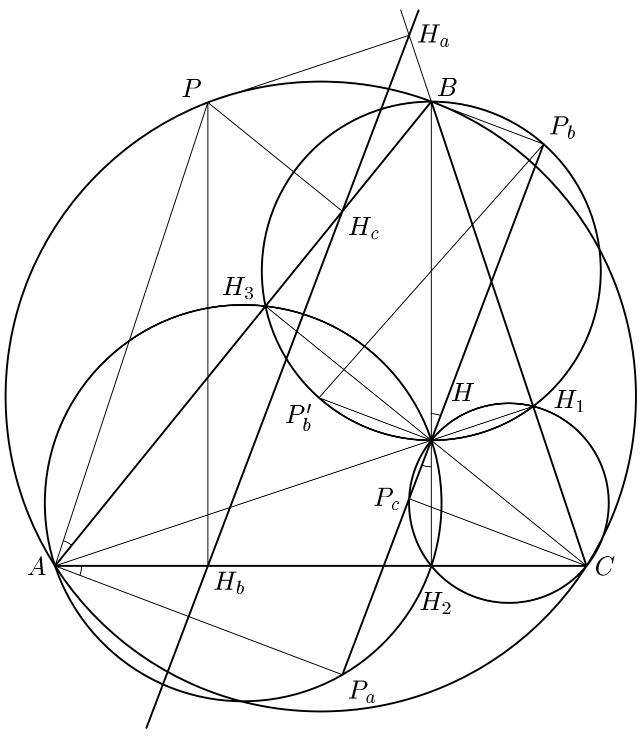

Рис. 1.

треугольников H_aBH_c, H_aCH_b, H_cAH_b соответственно, т. е. $BP_b \perp H_aH_c$, $CP_c \perp H_aH_b$, $AP_a \perp H_bH_c$. Но $\angle BP_bH = \angle CP_cH = \angle AP_aH = 90^\circ$ как вписанные углы, опирающиеся на диаметры описанных окружностей треугольников BH_3H_1, CH_1H_2, AH_2H_3, поэтому $H_aH_c \parallel P_bH$, $H_aH_b \parallel P_cH$, $H_bH_c \parallel P_aH$. Вспомнив, что точки P_a, P_b, P_c, H лежат на одной прямой, получаем, что и точки H_a, H_b, H_c также лежат на одной прямой. Кроме того, $H_aH_b = P_aP_b$, $H_bH_c = P_bP_c$, $H_cH_a = P_cP_a$ как противоположные стороны параллелограммов $P_aH_bH_aP_b$, $P_cH_bH_cP_b$, $P_aH_cH_aP_c$. Таким образом, следствие 2 справедливо и в случае вырожденного педального треугольника. Итак, мы пришли к следующему результату: основания перпендикуляров, опущенных из точки, взятой на описанной окружности треугольника, на его стороны или продолжения сторон, лежат на одной прямой.

Эта прямая называется прямой Симсона.

Теорема 5. Прямая Симсона точки P относительно треугольника ABC проходит через середину отрезка PH, где H — ортоцентр треугольника ABC.

Доказательство. Вернемся к нашей конфигурации, изображенной на рис. 1. Мы установили, что прямая $P_aP_bP_c$ параллельна прямой Симсона точки P, одинаково расположенной с точками P_a, P_b, P_c относительно треугольников ABC, AH_2H_3, BH_3H_1, CH_1H_2 соответственно, поэтому согласно теореме 3 точки P_a, P_b, P_c симметричны точке P относительно середин отрезков H_aH_b, H_bH_c, H_aH_b. Другими словами, прямая Симсона $H_bH_cH_a$ точки P проходит через середины отрезков PP_a, PP_b, PP_c, а, значит, и через середину отрезка PH (напомним, что прямая $P_aP_bP_c$ проходит через H). □

Далее, пусть P_b' — точка, диаметрально противоположная P_b относительно описанной окружности треугольника BH_3H_1. Тогда $\angle P_b'HP_b = 90^\circ$, т. е. $P_b'H \perp P_bH$, но $P_b'H$ параллельна прямой Симсона точки P', диаметрально противоположной точке P относительно описанной окружности треугольника ABC.

Таким образом, получено

Предложение 1. Прямые Симсона диаметрально противоположных точек перпендикулярны.

Пусть точка P движется против часовой стрелки по описанной окружности треугольника ABC с постоянной угловой скоростью ω. Тогда угловые меры дуг BP и BP_b равны и $\angle BHP_b = \frac{1}{2}\smile BP_b = \frac{1}{2}\omega t$. Это означает, что прямая $P_aP_cHP_b$ вращается вокруг точки H по часовой стрелке с постоянной угловой скоростью $\omega/2$. Прямая Симсона точки P, параллельная прямой P_aP_b, также вращается с угловой скоростью $\omega/2$ по часовой стрелке вокруг некоторого переменного центра вращения. Другими словами, если радиус OP вращается с постоянной угловой скоростью ω, то прямая Симсона точки P вращается с постоянной угловой скоростью $-\omega/2$.

Предложение 2. Прямая Симсона точки P, лежащей на описанной окружности треугольника ABC, перпендикулярна прямым, симметричным прямым PA, PB, PC относительно биссектрис углов A, B, C треугольника ABC соответственно.

Доказательство. Проведем отрезки AP_a, BP_b, CP_c. Так как отрезки AH, BH, CH являются диаметрами описанных окружностей треугольников AH_2H_3, BH_3H_1, CH_1H_2, то $\angle AP_aH = \angle BP_bH = \angle CP_cH = 90^\circ$ и поэтому отрезки AP_a, BP_b, CP_c параллельны. Но поскольку точки P, P_a, P_b, P_c одинаково расположены относительно треугольников ABC, AH_2H_3, BH_3H_1, CH_1H_2, то прямые AP_a, BP_b, CP_c симметричны прямым AP, BP, CP относительно биссектрис углов A, B, C треугольника ABC. Осталось только вспомнить, что прямая $P_aP_cHP_b$ параллельна прямой Симсона точки P. □

Использовав определение изогональных прямых, предложение 2 можно переформулировать следующим образом:

Предложение 3. Прямая Симсона точки P, лежащей на описанной окружности треугольника ABC, перпендикулярна прямым, изогональным прямым PA, PB, PC относительно углов A, B, C треугольника ABC.

Заметим, что попутно мы доказали, что для точки P описанной окружности треугольника ABC прямые, изогональные прямым PA, PB, PC относительно углов A, B, C треугольника ABC, параллельны. Будем считать, что параллельные прямые пересекаются в бесконечно удаленной точке. Тогда можно сказать, что точка P', изогональная точке P, лежащей на описанной окружности треугольника ABC, бесконечно удалена. Верно и обратное, т. е. точка P, изогональная бесконечно удаленной точке P', относительно треугольника ABC, лежит на описанной окружности этого треугольника. Другими словами, справедливо

Предложение 4. Прямые ℓ_a, ℓ_b, ℓ_c, изогональные параллельным прямым ℓ'_a, ℓ'_b, ℓ'_c относительно треугольника ABC, пересекаются в точке, лежащей на описанной окружности этого треугольника.

Непосредственным следствием предложения 4 является

Теорема 6. Пусть прямая ℓ, проходящая через центр описанной окружности треугольника ABC, одинаково расположена с прямыми ℓ_a,

ℓ_b, ℓ_c относительно треугольников ABC, AH_2H_3, BH_3H_1, CH_1H_2. Тогда прямые ℓ_a, ℓ_b, ℓ_c пересекаются в точке, лежащей на окружности Эйлера этого треугольника.

Доказательство. Пусть E — центр окружности Эйлера, а H — ортоцентр треугольника ABC; E_1, E_2, E_3 — середины отрезков AH, BH, CH. Проведем через точку E прямую ℓ_1, параллельную ℓ, а через точки E_1, E_2, E_3 — прямые ℓ_a, ℓ_b, ℓ_c, одинаково расположенные с прямой ℓ относительно треугольников ABC, AH_2H_3, BH_3H_1, CH_1H_2. Поскольку треугольники AH_2H_3, BH_3H_1, CH_1H_2 при симметрии относительно соответствующих биссектрис треугольника ABC переходят в треугольники, гомотетичные треугольнику ABC, то прямые ℓ_a, ℓ_b, ℓ_c изогональны относительно треугольника $E_1E_2E_3$ прямым ℓ'_a, ℓ'_b, ℓ'_c, параллельным прямой ℓ_1 и проходящим через вершины треугольника $E_1E_2E_3$. Поэтому в силу предложения 4 прямые ℓ_a, ℓ_b, ℓ_c пересекаются в точке, лежащей на описанной окружности треугольника $E_1E_2E_3$, совпадающей с окружностью Эйлера треугольника ABC. □

Теорема 7. Пусть P — произвольная точка описанной окружности треугольника ABC; AH_1, BH_2, CH_3 — его высоты, пересекающиеся в точке H; E_1, E_2, E_3 — середины отрезков AH, BH, CH; P_1, P_2, P_3 — точки, одинаково расположенные с P относительно треугольников AH_2H_3, BH_3H_1, CH_1H_2, ABC соответственно. Тогда прямые E_1P_1, E_2P_2, E_3P_3 пересекаются в такой точке K окружности Эйлера треугольника ABC, через которую проходит прямая Симсона точки P относительно треугольника ABC.

Доказательство. Обозначим через A_1, B_1, C_1 проекции точки P на стороны BC, CA, AB треугольника ABC, $\angle CAB = \alpha$, $\angle ABC = \beta$, $\angle BCA = \gamma$ (рис. 2). Так как P_2 и P_3 — ортоцентры треугольников A_1BC_1 и B_1CA_1 (см. следствие 1), то

$$\angle P_2A_1P_3 = \angle P_2A_1C + \angle P_3A_1C = 90^\circ - \angle C_1P_2A_1 + 90^\circ - \gamma = \\ = 180^\circ - \angle C_1P_2A_1 - \gamma.$$

Но $\angle C_1P_2A_1 = \angle C_1PA_1$ как противоположные углы параллелограмма $PA_1P_2C_1$, а $\angle C_1PA_1 + \angle C_1BA_1 = 180^\circ$, поскольку четырехугольник PA_1BC_1 вписанный ($\angle PA_1B + \angle PC_1B = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$). Поэтому

$$\angle P_2A_1P_3 = (180^\circ - \angle C_1P_2A_1) - \gamma = \angle C_1BA_1 - \gamma = \\ = 180^\circ - \beta - \gamma = \alpha = \angle E_2KE_3 = \angle P_2KP_3.$$

Из равенства углов P_2KP_3 и $P_2A_1P_3$ следует, что точки P_2, K, A_1, P_3 лежат на одной окружности. Аналогично показывается, что точки P_3, B_1, P_1, K также лежат на одной окружности.

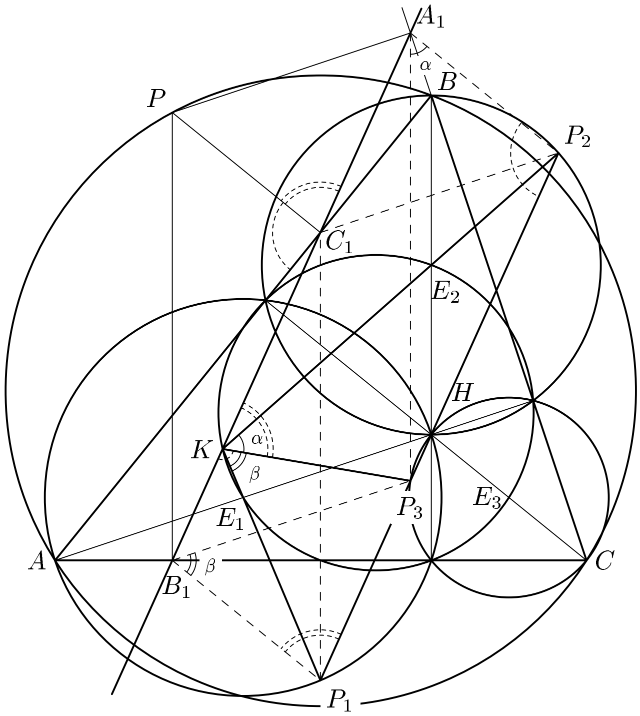

Рис. 2.

Далее, так как точка C_1 лежит на прямой Симсона A_1B_1, то $\angle B_1C_1P + \angle PC_1A_1 = 180^\circ$, но $\angle B_1C_1P = \angle A_1P_2P_3$, $\angle A_1C_1P = \angle B_1P_1P_3$ как углы с соответственно параллельными сторонами, а из вписанных четырехугольников $A_1P_2P_3K$ и $B_1P_1P_3K$ находим

$$\angle P_3KA_1 = 180^\circ - \angle A_1P_2P_3 = 180^\circ - \angle B_1C_1P = \angle PC_1A_1,$$
$$\angle P_3KB_1 = 180^\circ - \angle B_1P_1P_3 = 180^\circ - \angle A_1C_1P = \angle PC_1B_1.$$

Окончательно получаем $\angle B_1KP_3 + \angle P_3KA_1 = \angle PC_1A_1 + \angle PC_1B_1 = 180^\circ$, откуда следует, что точка K лежит на прямой Симсона A_1B_1. □

Прямые Симсона можно считать описанными окружностями бесконечно большого радиуса вырожденных педальных треугольников, поэтому теорема 7 является аналогом теоремы 4, и, более того, эти теоремы можно объединить в одну:

Теорема 8. Пусть P — произвольная точка в плоскости треугольника ABC; AH_1, BH_2, CH_3 — его высоты, пересекающиеся в точке H; E_1, E_2, E_3 — середины отрезков AH, BH, CH; P_1, P_2, P_3 — точки, одинаково расположенные с P относительно треугольников AH_2H_3, BH_3H_1,

CH_1H_2, ABC соответственно. Тогда прямые E_1P_1, E_2P_2, E_3P_3 пересекаются в такой точке K окружности Эйлера треугольника ABC, через которую проходит описанная окружность педального треугольника точки P относительно треугольника ABC.

Теорему 8 можно переформулировать следующим образом:

Теорема 9. Пусть P — произвольная точка в плоскости треугольника ABC; AH_1, BH_2, CH_3 — его высоты, пересекающиеся в точке H; E_1, E_2, E_3 — середины отрезков AH, BH, CH; O — центр описанной окружности треугольника ABC; ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 — прямые, параллельные прямой OP и проходящие через точки E_1, E_2, E_3 соответственно; ℓ'_1, ℓ'_2, ℓ'_3 — прямые, изогональные ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 относительно треугольника $E_1E_2E_3$. Тогда прямые ℓ'_1, ℓ'_2, ℓ'_3 пересекаются в такой точке K окружности Эйлера треугольника ABC, через которую проходит описанная окружность педального треугольника точки P относительно треугольника ABC.

Теорема 10. Прямые Симсона диаметрально противоположных точек P и P' перпендикулярны и пересекаются в точке, лежащей на окружности Эйлера треугольника ABC, причем вторые точки пересечения этих прямых с окружностью Эйлера являются концами ее диаметра, параллельного PP'.

Доказательство. Согласно теореме 7 прямые Симсона диаметрально противоположных точек P и P' пересекаются в точке K, лежащей на окружности Эйлера треугольника ABC.

Но, как было установлено выше (см. предложение 1), прямые Симсона диаметрально противоположных точек перпендикулярны, поэтому $K_1K'_1$ — диаметр окружности Эйлера, где K_1 и K'_1 — вторые точки пересечения прямых Симсона точек P и P' с окружностью Эйлера (рис. 3).

Рассмотрим прямую Симсона ℓ точки P. Точка K пересечения этой прямой с окружностью Эйлера совпадает с точкой пересечения прямых E_1P_1, E_2P_2, E_3P_3, одинаково расположенных с прямой OP относительно треугольников AH_2H_3, BH_3H_1, CH_1H_2, ABC (O — как всегда центр описанной окружности треугольника ABC). Вторая точка K_1 пересечения прямой Симсона ℓ точки P с окружностью Эйлера совпадает согласно теореме 5 с серединой отрезка PH, где H — ортоцентр треугольника ABC.

Аналогично, точка K'_1 совпадает с серединой отрезка $P'H$, и, таким образом, диаметр $K_1K'_1$ окружности Эйлера является средней линией треугольника PHP' и, следовательно, параллелен диаметру PP'. □

Замечание. Пусть P' — бесконечно удаленная точка, изогональная точке P. Тогда точка K_1, совпадающая с серединой отрезка PH, изогонально сопряжена с P' относительно треугольника $E_1E_2E_3$ (см.

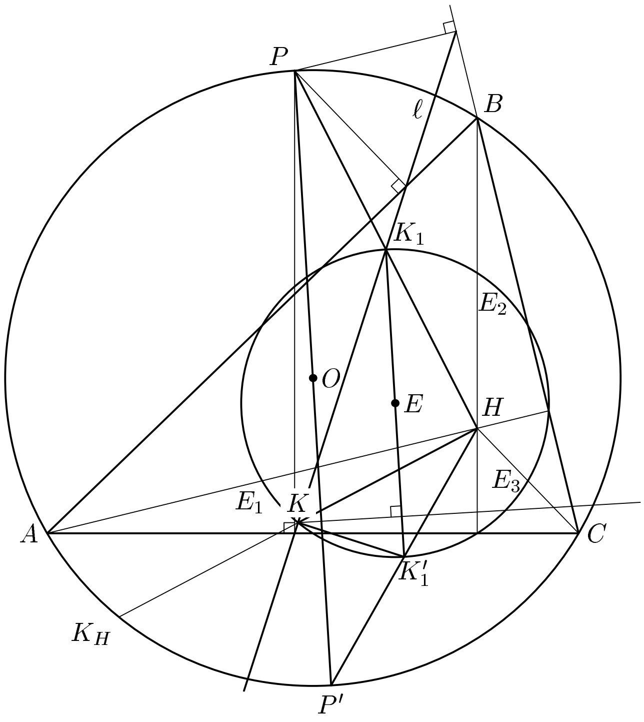

Рис. 3.

предложения 2–4). Тогда, если считать прямую Симсона ℓ точки P общей педальной окружностью точек P и P', то теорема 9 будет справедлива и для бесконечно удаленной точки P'.

Напомним, что точкой Тебо называется такая точка окружности Эйлера треугольника ABC, в которой пересекаются прямые Эйлера треугольников AH_2H_3, BH_1H_3, CH_1H_2, где H_1, H_2, H_3 — основания высот треугольника ABC.

Следствие 3. Пусть прямая Эйлера треугольника ABC пересекает его описанную окружность в точках P и P'. Тогда прямые Симсона точек P и P' пересекаются в точке Тебо треугольника ABC.

Следствие 4. Прямые Симсона концов диаметра описанной окружности треугольника, проходящего через центр его вписанной окружности, пересекаются во внутренней точке Фейербаха этого треугольника, а прямые Симсона концов диаметров, проходящих через центры вневписанных окружностей, пересекаются во внешних точках Фейербаха этого треугольника.

Теорема 11. Пусть P и P' — диаметрально противоположные точки описанной окружности треугольника ABC, K — точка пересечения прямых Симсона точек P и P', лежащая на окружности Эйлера треугольника ABC, K_1 и K_1' — вторые точки пересечения прямых Симсона точек P и P' с окружностью Эйлера, K_H — точка, симметричная ортоцентру H относительно точки K.

Тогда прямая Симсона точки K_H перпендикулярна диаметру K_1K_1' окружности Эйлера треугольника ABC.

Доказательство. Вернемся к рис. 3. Пусть K — точка окружности Эйлера треугольника ABC, а K_H — точка, гомотетичная K с центром гомотетии H и коэффициентом гомотетии 2.

Как мы уже говорили, прямые KE_1, KE_2, KE_3 изогональны диаметральной прямой PP'. Поэтому и параллельные им прямые K_HA, K_HB, K_HC также изогональны этой прямой. Но, как мы знаем (см. предложение 2), прямая Симсона точки P перпендикулярна параллельным прямым, изогональным прямым PA, PB, PC. Отсюда следует, что прямая Симсона точки K_H перпендикулярна диаметру PP', а, значит, и параллельному ему диаметру K_1K_1' окружности Эйлера треугольника ABC. □

Следствие 5. Пусть T_H — точка, симметричная ортоцентру относительно точки Тебо произвольного треугольника. Тогда прямая Симсона точки T_H перпендикулярна прямой Эйлера этого треугольника.

Следствие 6. Прямая Симсона точки, симметричной ортоцентру произвольного треугольника относительно его внутренней точки Фейербаха, перпендикулярна прямой, проходящей через центры вписанной и описанной окружностей этого треугольника.

Докажем теперь следующее утверждение:

Предложение 5. Пусть треугольники ABC и $A'B'C'$ с ортоцентрами H и H' имеют общую окружность Эйлера.

Тогда, если какие-либо две взаимно перпендикулярные прямые Симсона этих треугольников совпадают, то совпадают и все остальные прямые Симсона этих треугольников.

Доказательство. Как следует из теоремы 10, совпадающие прямые Симсона P_1K и P_2K треугольников ABC и $A'B'C'$ являются прямыми Симсона концов параллельных диаметров описанных окружностей треугольников ABC и $A'B'C'$, получающихся из диаметра P_1P_2 их общей окружности Эйлера гомотетиями с центрами в точках H и H' и коэффициентом 2 (рис. 4).

Начнем вращать эти параллельные диаметры вокруг центров соответствующих окружностей в одну и ту же сторону с одинаковой угловой

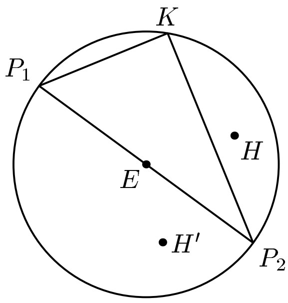

Рис. 4.

скоростью, тогда с той же угловой скоростью и в ту же сторону будет вращаться и соответствующий этим диаметрам диаметр P_1P_2 общей окружности Эйлера треугольников ABC и $A'B'C'$. Прямые Симсона концов вращающихся диаметров будут проходить через середины отрезков, соединяющих эти концы с точками H и H' (для концов диаметра описанной окружности треугольника ABC — с H, а для концов второго диаметра — с H'), т.е. через точки P_1 и P_2.

Но, как было установлено ранее, прямые Симсона концов параллельных диаметров будут вращаться вокруг точек P_1 и P_2 в противоположную сторону с угловой скоростью в два раза меньшей скорости вращения параллельных диаметров.

Итак, прямые Симсона концов параллельных диаметров описанных окружностей треугольников ABC и $A'B'C'$ в начальный момент времени совпадают, а затем начинают вращаться вокруг одних и тех же точек P_1 и P_2 в одну и ту же сторону с одинаковыми угловыми скоростями и поэтому совпадают в любой момент времени.

Более точно: пусть O и O' — центры описанных окружностей треугольников ABC и $A'B'C'$. Тогда, если для двух точек P и P', лежащих на описанных окружностях треугольников ABC и $A'B'C'$, векторы OP и $O'P'$ сонаправлены, то прямые Симсона точек P и P' совпадают. $\square$

3. Касание прямых Симсона с окружностью Эйлера данного треугольника

Напомним следующий факт, являющийся непосредственным следствием теорем 2 и 9.

Пусть P и P' — изогонально сопряженные точки относительно треугольника ABC. Тогда, если прямая PP' проходит через центр описанной окружности этого треугольника, то общая педальная окружность точек P и P' касается окружности Эйлера треугольника ABC.

В случае, когда P лежит на описанной окружности треугольника ABC, прямые, изогональные прямым PA, PB, PC, параллельны, т.е. точка P' бесконечно удалена, а общая педальная окружность точек P и P' вырождается в прямую Симсона точки P. Как мы уже знаем (см. замечание после теоремы 10), бесконечно удаленной точке P' соответствует точка пересечения прямой Симсона точки P с окружностью Эйлера треугольника ABC, совпадающая с серединой отрезка PH, где H — ортоцентр треугольника ABC.

Вторая точка пересечения прямой Симсона точки P с окружностью Эйлера получится в результате пересечения прямых E_1P_1, E_2P_2, E_3P_3, изогональных прямой OP относительно углов E_1, E_2, E_3 треугольника $E_1E_2E_3$ (здесь, как и раньше, E_1, E_2, E_3 — точки Эйлера, т.е. середины отрезков AH, BH, CH). Прямая Симсона точки P будет касаться окружности Эйлера треугольника ABC в том и только в том случае, когда эти две точки совпадают, а для этого необходимо и достаточно, чтобы прямые, изогональные прямым AP, BP, CP относительно углов A, B, C треугольника ABC, были параллельны OP.

Другими словами, прямая OP должна проходить через бесконечно удаленную точку P', т.е. и в этом случае прямая PP' проходит через центр O описанной окружности треугольника ABC.

Теорема 12. Среди всех прямых Симсона произвольного треугольника имеется ровно три, которые касаются окружности Эйлера этого треугольника. Точки касания являются вершинами равностороннего треугольника. Если α, β, γ — величины углов данного треугольника ($\alpha < \beta < \gamma$), то стороны этого равностороннего треугольника образуют с соответствующими сторонами данного треугольника углы, равные $(\gamma-\alpha)/3$, $(\beta-\alpha)/3$, $(\gamma-\beta)/3$.

Доказательство. Пусть AL — биссектриса угла BAC, N — точка, диаметрально противоположная P, K — точка пересечения AL и PN, $1/2\smile AP = \varphi_1$ (рис. 5). Прямые AP и OP изогональны относительно угла BAC тогда и только тогда, когда $\angle PAK = \angle PKA$. Поскольку PN — диаметр, то $\angle PAN = 90^\circ$ и $\angle APK = \angle APN = 90^\circ - \angle ANP = 90^\circ - \varphi_1$ и, предполагая, что $\angle PAK = \angle PKA$, найдем

$$\angle PAK = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle APK) = \frac{1}{2}(180^\circ - (90^\circ - \varphi_1)) = \frac{1}{2}(90^\circ + \varphi_1) = 45^\circ + \frac{1}{2}\varphi_1\,.$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned}\angle PAK = \angle PAB + \angle BAL = \frac{1}{2}\smile PB + \frac{1}{2}\angle BAC = \\ = \frac{1}{2}\smile APB - \frac{1}{2}\smile AP + \frac{1}{2}\alpha = \gamma - \varphi_1 + \frac{1}{2}\alpha.\end{aligned}$$

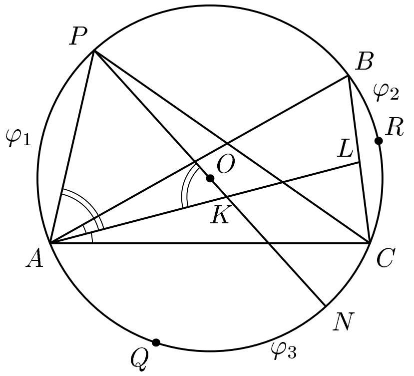

Рис. 5.

Поэтому $45° + \varphi_1/2 = \gamma - \varphi_1 + \alpha/2$, откуда $3\varphi_1/2 = \gamma + \alpha/2 - 45°$, $\varphi_1 = 2/3(\gamma + \alpha/2) - 30° = 2/3\gamma + \alpha/3 - 30°$.

Точно так же найдем еще две точки R и Q, для которых их прямые Симсона касаются окружности Эйлера треугольника ABC (рис. 6). Они определяются условиями $\varphi_2 = 1/2\smile BK = 2/3\alpha + \beta/3 - 30°$, $\varphi_3 = 1/2\smile CQ = 2/3\beta + \gamma/3 - 30°$ (как всегда, считаем, что $\alpha < \beta < \gamma$).

Найдем углы треугольника PQR:

$$\begin{aligned}\angle PRQ = \frac{1}{2}\smile PR = \frac{1}{2}\smile PB + \frac{1}{2}\smile BR = \gamma - \varphi_1 + \varphi_2 = \\ = \gamma - (2/3\gamma + 1/3\alpha - 30°) + 2/3\alpha + \beta/3 - 30° = \\ = \gamma/3 + \alpha/3 + \beta/3 = (\alpha + \beta + \gamma)/3 = 180°/3 = 60°.\end{aligned}$$

Аналогично, $\angle PRQ = \angle KRQ = 60°$.

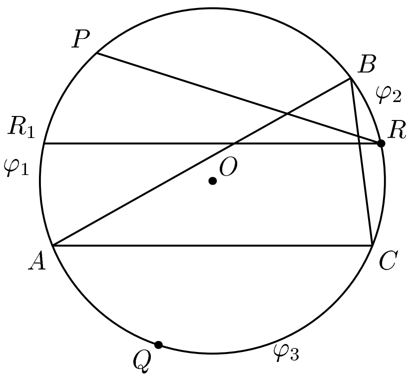

Рис. 6.

Итак, мы получили, что треугольник PQR равносторонний. Поскольку точки касания P_1, Q_1, R_1 прямых Симсона точек P, Q, R с окружностью Эйлера треугольника ABC являются серединами отрезков PH, QH, RH, где H — ортоцентр треугольника ABC, то треугольники PQR и $P_1Q_1R_1$ гомотетичны и, следовательно, треугольник $P_1Q_1R_1$ также равносторонний.

Найдем угол между сторонами PR и AC треугольников PQR и ABC. Для этого проведем через точку R хорду RR_1, параллельную AC. Тогда

$$\begin{gathered}\angle PRR_1 = \frac{1}{2}\smile PR_1 = \frac{1}{2}\smile AP - \frac{1}{2}\smile AR_1 = \frac{1}{2}\smile AP - \frac{1}{2}\smile CR = \\ = \frac{1}{2}\smile AP - (\frac{1}{2}\smile BC - \frac{1}{2}BK) = \varphi_1 - (\alpha - \varphi_2) = \\ = 2/3\gamma + 1/3\alpha - 30^\circ - (\alpha - (2/3\alpha + \beta/3 - 30^\circ)) = \\ = 2/3\gamma + \alpha/3 - 30^\circ - \alpha/3 + \beta/3 - 30^\circ = \\ = (\gamma+\alpha+\beta)/3 + \gamma/3 - \alpha/3 - 60^\circ = 180^\circ/3 + (\gamma-\alpha)/3 - 60^\circ = (\gamma-\alpha)/3.\end{gathered}$$

Аналогично, углы между сторонами QR и AB, PQ и BC равны соответственно $(\beta - \alpha(/3$ и $(\gamma - \beta)/3$.

Заметим, что в ходе доказательства теоремы 12 установлено, что на описанной окружности каждого треугольника существуют ровно три точки, прямые Симсона которых касаются окружности Эйлера треугольника, причем эти точки совпадают с вершинами правильного треугольника. Данное утверждение составляет содержание задачи 8.4 задачника «Математического просвещения» (вып. 9, 2004, с. 246). Таким образом, попутно мы привели решение этой задачи.

Напомним, что геометрическое место точек P таких, что прямая PP', где P' — точка, изогональная P, проходит через центр описанной окружности треугольника, называется кубикой Мак-Кэя этого треугольника. Из теорем 2 и 9 следует, что кубика Мак-Кэя треугольника совпадает с геометрическим местом точек P, обобщенная педальная окружность которых касается окружности Эйлера этого треугольника.

Так как прямые Симсона точек P, Q, R где P, Q, R — вершины равностороннего треугольника, лежащие на описанной окружности треугольника ABC, касаются окружности Эйлера этого треугольника, то точки P, Q, R принадлежат кубике Мак-Кэя треугольника ABC. Таким образом, кубика Мак-Кэя пересекает описанную окружность треугольника в трех точках, являющихся вершинами равностороннего треугольника.

Рассмотрим теперь одну из прямых Симсона, касающихся окружности Эйлера данного треугольника в точке M (рис. 7). Пусть эта прямая Симсона ℓ является прямой Симсона точки P, лежащей на описанной

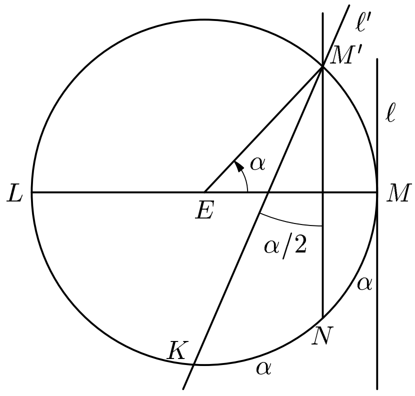

Рис. 7.

окружности треугольника ABC, и пусть радиус OP повернулся против часовой стрелки на угол OP так, что точка P приняла положение P'.

Тогда в силу гомотетичности описанной окружности треугольника ABC и окружности Эйлера этого треугольника с центром в точке пересечения высот H прямая Симсона ℓ' точки P' будет проходить через точку M' окружности Эйлера такую, что ${}^{\smile}MM' = \alpha$. При этом, как уже неоднократно говорилось, прямая ℓ' повернется вокруг точки M' на угол $\alpha/2$, т. е., если провести хорду $M'N$, параллельную ℓ, то $\angle KM'N = \alpha/2$ и ${}^{\smile}KN = \alpha$. Дуги $M'M$ и MN симметричны относительно диаметра LM, поэтому ${}^{\smile}NM = {}^{\smile}MM' = \alpha$ и ${}^{\smile}KM = {}^{\smile}KN + {}^{\smile}NM = \alpha + \alpha = 2\alpha$.

Итак, справедливо

Предложение 6. Пусть M — точка касания прямой Симсона произвольного треугольника с его окружностью Эйлера. Тогда произвольная прямая Симсона этого треугольника пересекает его окружность Эйлера в точках K и Q таких, что точки K и Q лежат по разные стороны от диаметра, проходящего через точку M и ${}^{\smile}KM = 2\,{}^{\smile}MQ$.

4. О кубике Мак-Кэя и кривой Штейнера

В этом пункте нам понадобится следующее утверждение из [3].

Теорема 13 (12). Изогональным образом прямой ℓ, проходящей через центр описанной окружности треугольника ABC и не содержащей его вершин, является равносторонняя гипербола, описанная около этого треугольника, причем асимптотами этой гиперболы являются прямые Симсона точек пересечения прямой ℓ с описанной окружностью треугольника ABC.

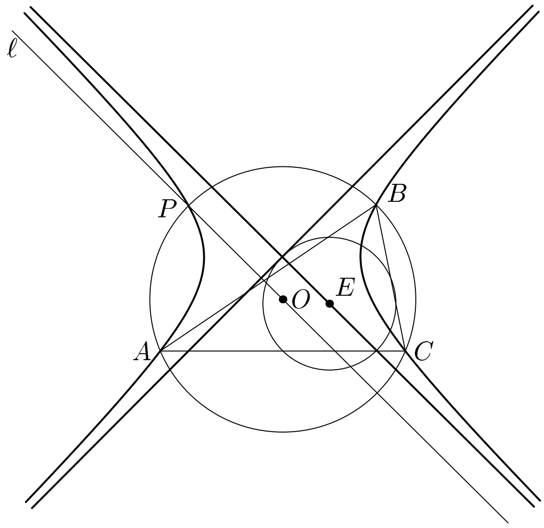

Рис. 8.

Рассмотрим пару взаимно перпендикулярных прямых Симсона, одна из которых касается окружности Эйлера данного треугольника ABC, а вторая проходит через центр этой окружности (рис. 8). Тогда эти прямые являются асимптотами равносторонней гиперболы Γ, описанной около треугольника ABC и совпадающей с изогональным образом прямой ℓ, проходящей через центр O описанной окружности треугольника ABC параллельно той асимптоте, на которой лежит центр окружности Эйлера этого треугольника. Прямая ℓ проходит через точку P пересечения гиперболы Γ с описанной окружностью треугольника ABC, центр O этой окружности и бесконечно удаленную точку P', изогональную точке P, поэтому точки P и P' принадлежат кубике Мак-Кэя треугольника ABC. Если вращать прямую ℓ вокруг точки O по часовой стрелке, то прямая Симсона точки P начнет вращаться против часовой стрелки (см. начало пункта 2), соответственно против часовой стрелки будет вращаться и перпендикулярная ей прямая.

Отсюда следует, что прямая ℓ пересечет гиперболу Γ, являющуюся ее изогональным образом, в двух изогональных точках P и P' (рис. 9). Так как прямая ℓ проходит через центр описанной окружности треугольника ABC, то это означает, что точки P и P' принадлежат кубике Мак-Кэя этого треугольника. Но после бесконечно малого поворота исходной прямой ℓ вокруг точки O точка P' будет мало отличаться от бесконечно удаленной точки, через которую проходит исходная гипербола Γ, а также ее асимптота, содержащая центр окружности Эйлера треугольника

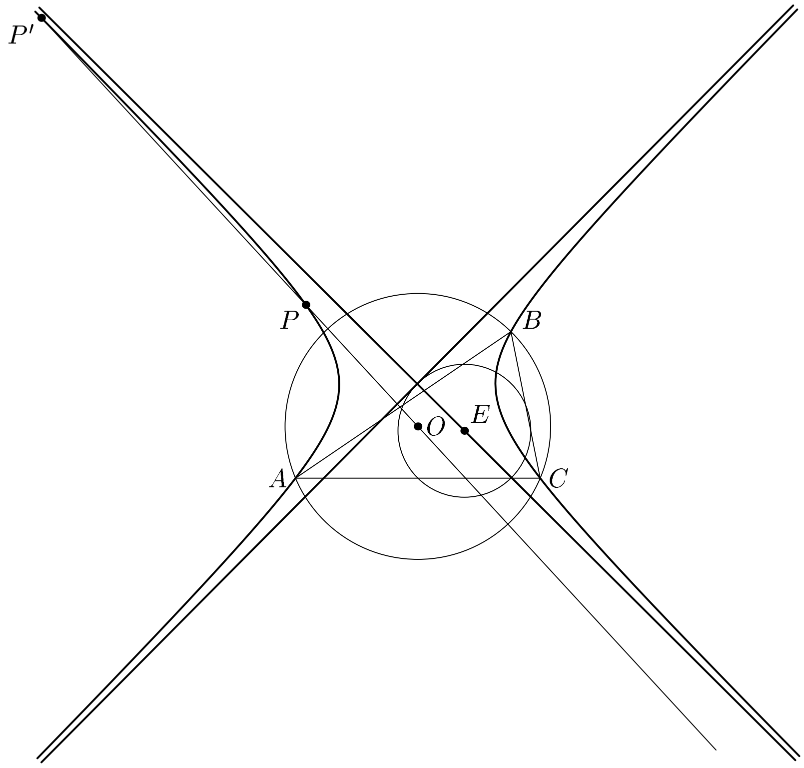

Рис. 9.

ABC и точку касания этой окружности с прямой Симсона точки P. Из приведенных рассуждений вытекает

Теорема 14. Кубика Мак-Кэя произвольного треугольника имеет три асимптоты, которые пересекаются в центре окружности Эйлера этого треугольника и проходят через три точки касания окружности Эйлера с прямыми Симсона.

Рассмотрим теперь равностороннюю гиперболу Γ и из произвольной точки I этой гиперболы как из центра проведем окружность, проходящую через центр O гиперболы Γ (рис. 10). Пусть D — точка гиперболы, диаметрально противоположная I, а окружность с центром I и радиусом ID пересекает ту ветвь гиперболы, на которой лежит ее центр I, в точках A и B, C — вторая точка пересечения этой окружности с другой ветвью гиперболы Γ.

Покажем, что треугольник ABC правильный. Опустим из точки D на прямую AB перпендикуляр, который пересечет гиперболу в точке H.

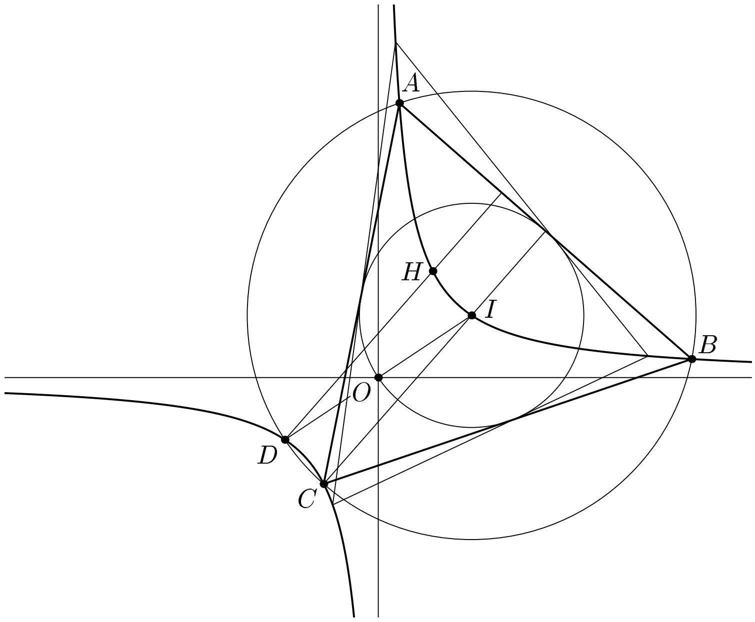

Рис. 10.

Тогда H — ортоцентр треугольника ADB и точка H', симметричная H относительно центра O гиперболы, лежит на этой гиперболе. С другой стороны, поскольку центр O гиперболы Γ лежит на окружности Эйлера треугольника ADB, вписанного в эту гиперболу, а описанная окружность этого треугольника гомотетична окружности Эйлера с центром H и коэффициентом 2, то точка H' совпадает с точкой пересечения описанной окружности треугольника ADB с гиперболой Γ, т. е. с точкой C. Но тогда диагонали четырехугольника $ICDH$ делятся точкой пересечения O пополам и, таким образом, $ICDH$ — параллелограмм. Так как $CI \parallel DH$, а $DH \perp AB$, то и $CI \perp AB$. Поскольку I лежит на гиперболе Γ, отсюда вытекает, что I — ортоцентр треугольника ABC. Вспомнив, что I — центр описанной окружности треугольника ABC, получим, что в этом треугольнике ортоцентр совпадает с центром описанной окружности, и, следовательно, треугольник ABC — равносторонний.

Итак, существует треугольник, вписанный в гиперболу Γ и описанный около окружности I, поэтому по теореме Понселе (см. [4, с. 166]) таких треугольников существует бесконечно много: за вершину A можно взять любую точку гиперболы, лежащую вне окружности I и провести через A прямые до пересечения с гиперболой в точках B и C. Тогда прямая BC будет касаться окружности I (рис. 10).

Теорема 15. Пусть I — окружность с центром на равносторонней гиперболе Γ, проходящая через центр F этой гиперболы. Тогда асимптоты кубик Мак-Кэя всех треугольников, вписанных в гиперболу Γ и описанных около окружности I, соответственно параллельны, а их точки пересечения лежат на прямой FI.

Доказательство. Рассмотрим треугольник ABC, вписанный в гиперболу Γ и описанный около окружности I. Поскольку окружность Эйлера треугольника ABC проходит через центр O гиперболы Γ одновременно со вписанной окружностью I этого треугольника, то по теореме Фейербаха эти окружности касаются в точке F и, таким образом, точка F совпадает с одной из точек Фейербаха треугольника ABC. Отсюда следует, что центр E окружности Эйлера треугольника ABC лежит на прямой FI, но по теореме 14 центр окружности Эйлера треугольника является точкой пересечения асимптот кубики Мак-Кэя этого треугольника.

Для любого треугольника ABC, вписанного в гиперболу Γ и описанного около окружности I, гипербола Γ является изогональным образом прямой OI, где O — центр описанной окружности треугольника ABC. Так как прямая OI касается гиперболы Γ в точке I, то это означает, что центры описанных окружностей треугольников ABC лежат на касательной к гиперболе Γ в точке I, а асимптоты этой гиперболы совпадают с прямыми Симсона точек пересечения этой касательной с описанными окружностями треугольников ABC.

Применим к треугольнику ABC гомотетию с центром F, переводящую окружность Эйлера этого треугольника в окружность I. Тогда окружность Эйлера треугольника $A_1B_1C_1$, полученного в результате этой гомотетии, совпадет с окружностью I, являющейся окружностью Эйлера правильного треугольника, вписанного в гиперболу Γ и описанного около окружности I. Так как, кроме того, асимптоты гиперболы будут прямыми Симсона обоих треугольников, то согласно предложению 5 совпадут и остальные соответствующие прямые Симсона этих треугольников. Отсюда следует, что совпадут также точки касания прямых Симсона этих треугольников с их общей окружностью Эйлера и по теореме 14 совпадут асимптоты их кубик Мак-Кэя. Поскольку треугольники ABC получаются из треугольников $A_1B_1C_1$ гомотетией с центром F, то асимптоты их кубик Мак-Кэя соответственно параллельны. □

Кривой Штейнера называется трехрогая гипоциклоида, т. е. кривая, описываемая точкой M окружности радиуса r, которая катится по окружности радиуса $3r$ без скольжения, все время касаясь ее внутренним образом.

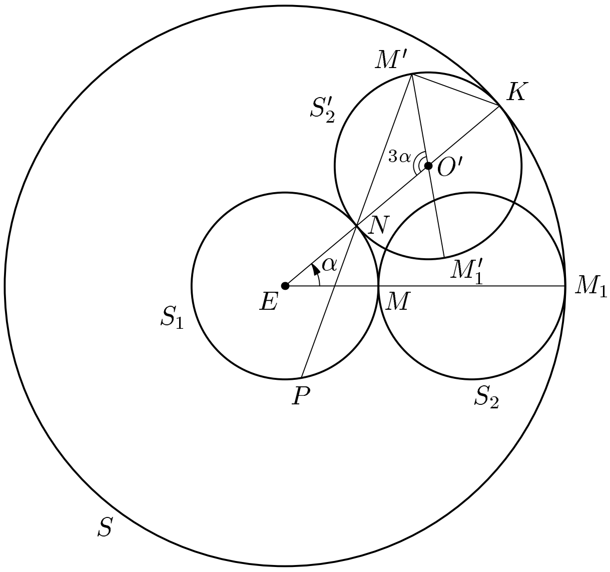

Рис. 11.

Теорема 16. Пусть S и S_1 — концентрические окружности радиусов $3r$ и r соответственно, K — кривая Штейнера с вершинами на окружности S, касающаяся окружности S_1 в точке M. Тогда касательная к кривой Штейнера пересекает окружность S_1 в двух точках N и P таких, что $\smile PM = 2\smile NM$.

Доказательство. Обозначим через S_2 окружность радиуса r, касающуюся окружности S_1 внешним образом в точке M и окружности S внутренним образом в точке M_1. Кривая Штейнера, указанная в условии, совпадает с траекторией точки M окружности S_2 при качении внутренним образом окружности S_2 по окружности S без скольжения. Предположим, что окружность S_2 после поворота приняла положение S_2' и стала касаться окружностей S_1 и S в точках N и K соответственно, при этом $\angle KEM_1 = \alpha$, где E — центр окружностей S и S_1, а точки M и M_1 перешли в M' и M_1' (рис. 11).

Так как K — центр мгновенного вращения окружности S_2', то вектор скорости точки M', направленный по касательной к ее траектории, совпадающей с кривой Штейнера, перпендикулярен прямой $M'K$. Но $\angle NM'K = 90^\circ$, как вписанный угол окружности S_2', опирающийся на ее диаметр NK, поэтому прямая $M'N$ является касательной к кривой Штейнера в точке M'. Пусть P — точка пересечения касательной $M'N$ с окружностью S_1, а O' — центр окружности S_2'. Из-за отсутствия скольжения дуга

KM_1 окружности S равна дуге KM_1' окружности S_2': $\smile KM_1 = \smile KM_1'$ или $\alpha \cdot 3r = \beta \cdot r$, откуда $\beta = \angle KO'M_1' = 3\alpha = \angle M'O'N$.

Далее, из равенства равнобедренных треугольников PEN и $M'O_1N$ выводим, что $\angle PEN = \angle M'O'N = 3\alpha$, откуда получаем: $\angle PEM = \angle PEN - \angle MEN = 3\alpha - \alpha = 2\alpha$ и, таким образом, $\smile PM = 2\smile NM$. □

Из теоремы 12, предложения 6 и теоремы 16 вытекает

Теорема 17. Огибающей прямых Симсона произвольного треугольника является кривая Штейнера, касающаяся его окружности Эйлера в трех точках.

На рис. 12 изображены треугольник, его описанная окружность, окружность Эйлера и кривая Штейнера этого треугольника.

В свою очередь из теорем 14 и 17 выводится

Следствие 7. Асимптоты кубики Мак-Кэя произвольного треугольника совпадают с осями кривой Штейнера этого треугольника.

Обозначим, как всегда, через H ортоцентр треугольника ABC. Тогда окружность Эйлера треугольника ABC проходит через середины сторон треугольников ABC, ABH, BCH, CAH и поэтому эти треугольники имеют общую окружность Эйлера.

Отметим без доказательства, что треугольники ABC, ABH, BCH, CAH имеют также общую кривую Штейнера, а их кубики Мак-Кэя — соответственно общие асимптоты.

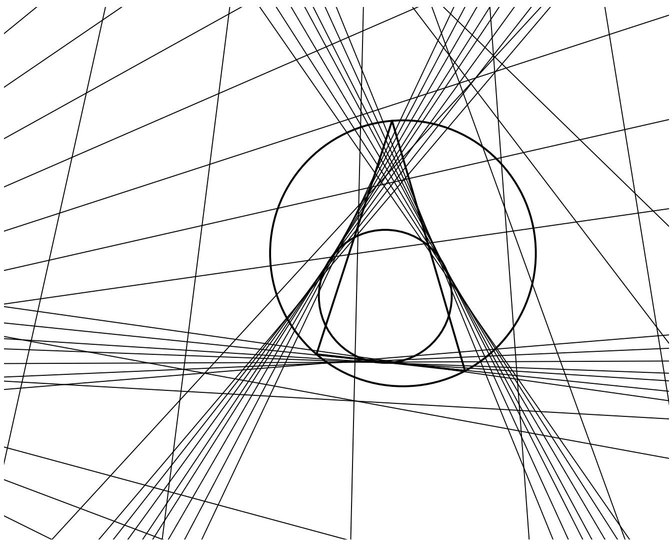

Рис. 12.

Приведем в заключение еще один интересный факт. Как известно, прямые, которые делят угол на три равные части, называются трисектрисами этого угла. Теорема Морлея утверждает, что трисектрисы углов треугольника, прилежащие к его сторонам, пересекаются в трех точках, являющихся вершинами равностороннего треугольника (более подробно о теореме Морлея см. [2] и [1]). Назовем этот треугольник треугольником Морлея. Оказывается, что для любого треугольника стороны его треугольника Морлея и равностороннего треугольника, вершины которого совпадают с вершинами кривой Штейнера исходного треугольника, соответственно параллельны.

Список литературы

[1] Конн А. *Новое доказательство теоремы Морли* // Математическое просвещение. Третья серия. Вып. 9. 2005.

[2] Куланин Е. Д. *Вокруг теоремы Морлея* // Приложение «Математика» к газете «Первое сентября», №24–25, 1995.

[3] Куланин Е. Д. *Об описанных окружностях чевианных и педальных треугольников и некоторых кривых, связанных с треугольником* // Математическое просвещение. Третья серия. Вып. 9. 2005.

[4] Прасолов В. В., Тихомиров В. М. Геометрия. М.: МЦНМО, 1997.

Е. Д. Куланин, Московский городской психолого-педагогический университет
e-mail: `lucas03@mail.ru`